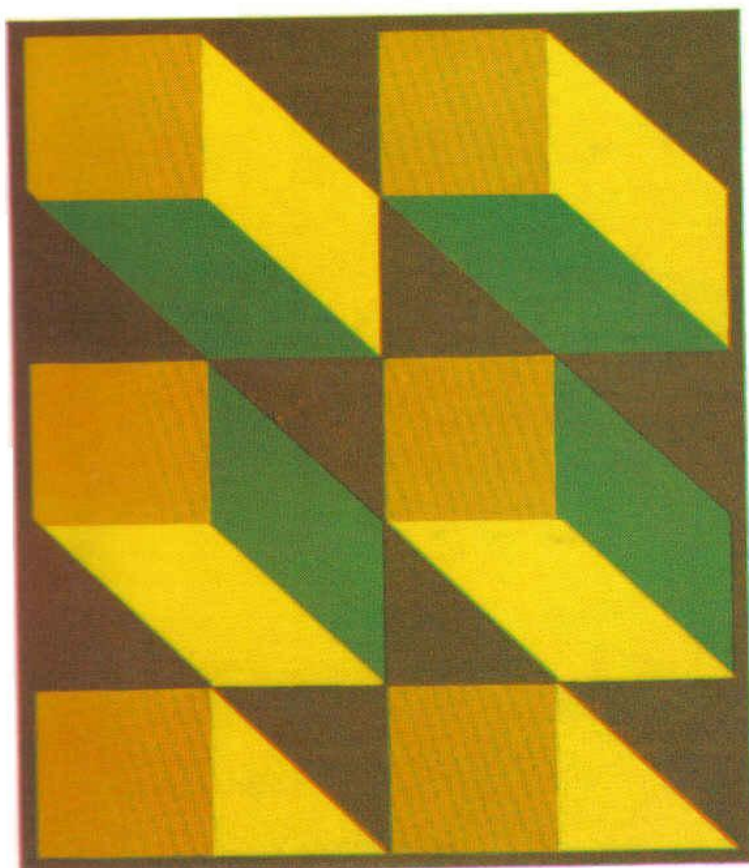
Geometria I

2.º grau, exame supletivo e vestibulares

A. C. Morgado
E. Wagner
M. Jorge

Honilton Medeiros

5ª EDIÇÃO

Honilton Medeiros

GEOMETRIA I

A. C. MORGADO / E. WAGNER / M. JORGE

GEOMETRIA I

5ª Edição

Agradecemos a colaboração do
Prof. Luiz Braga Neto
na revisão e correção dos problemas.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4 — TRIÂNGULOS

CAPÍTULO 5 — PRINCIPAIS QUADRILÁTEROS

CAPÍTULO 6

CAPÍTULO 7 — CÍRCULO

CAPÍTULO 8 — PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

INTRODUÇÃO

0.1 — UM POUCO DE HISTÓRIA

Possivelmente o primeiro documento importante da história da Geometria foi um papiro que datava do séc. XIX a. C. e que esteve em posse do escriba Ahmes, que o recopiou dois séculos mais tarde.

Até o quarto século antes de Cristo, a Geometria não passava de receitas descobertas experimentalmente, sem fundamento científico. Por exemplo, era de conhecimento dos egípcios que o triângulo cujos lados medem 3, 4 e 5 é retângulo, e era do conhecimento dos gregos que o comprimento de um círculo era aproximadamente 3 vezes o comprimento de seu próprio diâmetro.

Com o desenvolvimento da Lógica e com a contribuição de grandes sábios como Thales, Pitágoras, Platão e outros, a Geometria toma dimensão nova com o aparecimento de uma grande obra em 13 volumes chamada os ELEMENTOS de Euclides, com mais de mil edições até os dias de hoje. Nele a Geometria é apresentada de forma lógica e organizada, partindo de algumas suposições simples e desenvolvendo-se por raciocínio lógico.

0.2 — PRINCÍPIOS LÓGICOS FUNDAMENTAIS

0.2.1 — Princípio da Identidade:
"Todo conceito é igual a si mesmo."

0.2.2 — Princípio da Contradição:
"É impossível que algo seja e não seja verdadeiro ao mesmo tempo e sob uma mesma condição."

0.2.3 — Princípio do Meio Excluído:
"Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa."

0.2.4 — Princípio da Razão Suficiente:
"Todo juízo deve ter uma razão suficiente."

Para esclarecer este último princípio, considere a afirmação:

"Se C é um círculo, ENTÃO C tem centro."

C é *um círculo* é a causa ou razão suficiente.
C *tem centro* é o efeito (conclusão).

Devemos notar que, se o efeito é dado, não podemos concluir a causa. Por exemplo, se dissermos que C tem centro, não podemos concluir que C seja um círculo. Pode ser uma elipse ou uma infinidade de outras curvas.

0.3 — AS DEFINIÇÕES — OS CONCEITOS PRIMITIVOS

"Definir um conceito, representado por uma palavra ou símbolo, é expressar seu significado por meio de outras palavras ou símbolos já conhecidos."

É claro que toda definição deve ser suficientemente precisa para que, definido um conceito, possamos afirmar com segurança se um elemento está ou não contido na definição.

Sabendo que se deve definir um conceito por meio de outros já anteriormente definidos, sendo estes também definidos por meio de outros anteriores, e assim sucessivamente, chegaremos a um conceito primeiro cuja impossibilidade de defini-lo é evidente posto que não existe nenhum outro anterior. Chegamos, portanto, a um conceito *primitivo*.

0.4 — OS AXIOMAS

O grande passo dado por Euclides consistiu na introdução do método axiomático que consiste em estabelecer um conjunto de proposições que admitimos serem verdadeiras. Os axiomas são, pois, relações

entre os conceitos primitivos admitidas como verdadeiras e não concluídas, mediante encadeamento lógico de conceitos anteriores.

0.5 — OS TEOREMAS

É fácil notar que algumas afirmações em Geometria nos parecem tão óbvias que nunca nos lembraríamos de descobrir por que elas são verdadeiras e outras não são absolutamente óbvias, a ponto de despertar nossa curiosidade para a verificação de sua veracidade.

Estamos, então, em frente a um *teorema*.

Um teorema é, pois, qualquer proposição que seja conseqüência de proposições anteriores. Os teoremas constam de duas partes essenciais: a HIPÓTESE, que é o conjunto de proposições dadas, e a TESE, que é a proposição deduzida da hipótese mediante encadeamento lógico das proposições dadas; é, pois, a conclusão.

Se tomarmos a experiência e intuição como únicas bases das investigações matemáticas, fatalmente erraremos em algum ponto, pois, sendo imperfeitos nossos sentidos, deveremos concluir que não necessariamente nossa intuição sempre nos levará a um resultado correto. Realmente, deveremos apoiar nossas primeiras deduções em conceitos não definidos e proposições indemonstráveis, que admitiremos verdadeiras, mas, a partir daí, a lógica deve ser a responsável pela elaboração de outras proposições e propriedades decorrentes.

O conjunto de proposições que servem de fundamento a uma ciência é seu SISTEMA DE AXIOMAS. Como ele é arbitrário, respeitando certas normas, poderemos inventar Geometrias tão esquisitas, mas tão lógicas, quanto quisermos.

0.6 — SISTEMA AXIOMÁTICO

O Sistema Axiomático foi profundamente estudado por Hilbert*. Transcrevendo suas palavras: "Imaginemos três categorias de objetos, que chamaremos de PONTOS, RETAS e PLANOS. Haverá tantas Geometrias quantos forem os significados distintos que dermos a estas palavras. As relações entre esses elementos serão estabelecidas através dos axiomas."**

Para contruirmos a Geometria Euclidiana, poderemos partir de vários conjuntos de axiomas. Não começaremos de Euclides, mas sim de Hilbert, cuja base axiomática é bem mais sólida.

Em um sistema axiomático, os axiomas são basicamente de cinco tipos: de associação, de paralelismo, de continuidade, de congruência e de ordenação.

---

* David Hilbert (1862–1943) — matemático alemão.

** Grundlagen der Geometrie — 1899.

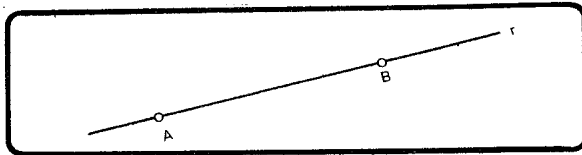
CAPÍTULO 1

1.1 — AXIOMAS DE ASSOCIAÇÃO

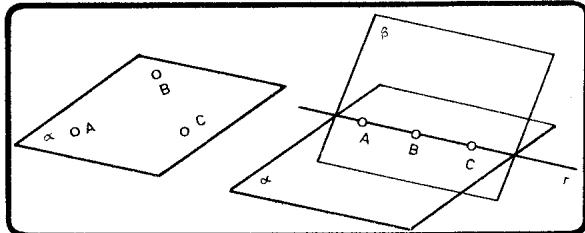
São axiomas de associação os que definem a pertinência e a determinação de elementos.

A–1 — O espaço é o conjunto de todos os pontos.

A–2 — Dois pontos distintos determinam uma reta.

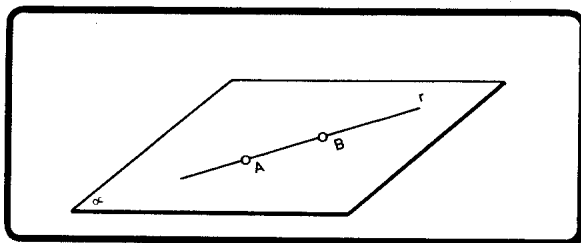
A–3 — Dois pontos distintos de uma reta determinam essa mesma reta.

A–4 — Três pontos não pertencentes a uma mesma reta definem um plano.

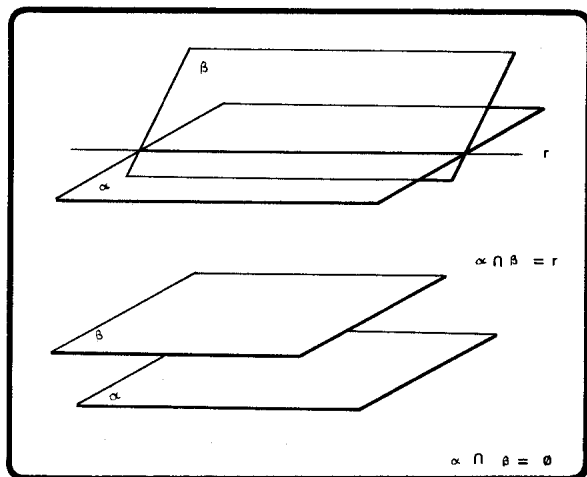
A, B e C determinam um plano.

A, B, e C não determinam um plano.

A–5 — Três pontos de um plano determinam esse mesmo plano.

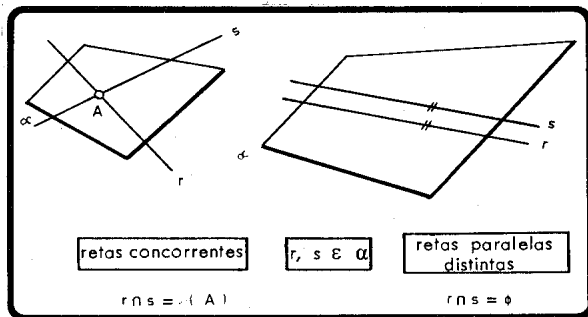
OBSERVAÇÕES: A2 e A3 dizem que dois pontos distintos determinam UMA, e APENAS UMA, reta.

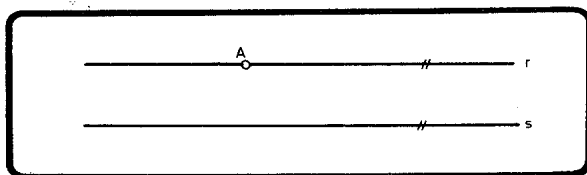
A4 e A5 dizem que três pontos não colineares determinam UM, e APENAS UM, plano.

A-6 — Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, todos os pontos dessa reta pertencem a esse plano.

A-7 — Se dois planos possuem um ponto comum, então possuem pelo menos algum outro ponto comum.

A-8 — A interseção de dois planos distintos, ou é uma reta ou um conjunto vazio.

PLANOS SECANTES

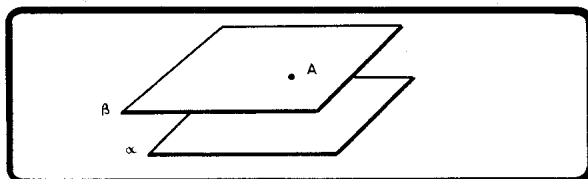
PLANOS PARALELOS

A-9 — A interseção de duas retas distintas de um plano, ou é um ponto ou um conjunto vazio.

1.2 — AXIOMAS DE PARALELISMO

A-10 — Por um ponto não pertencente a uma reta, passa uma, e apenas uma, reta paralela à primeira.

Este axioma caracteriza a geometria de Euclides. Parece que Gauss[1] foi o primeiro a verificar que era possível construir geometrias independentes do axioma das paralelas. Em 1826, Lobachevski[2] e, em 1829, Bolyai[3] apresentavam modelos de geometrias não euclidianas. Ambos negavam o axioma das paralelas, admitindo uma infini-

1. Carl Friedrich Gauss (1777–1855)
2. N. I. Lobachevski (1792–1856)
3. Janos Bolyai (1802–1860)

dade de retas do plano passando por um ponto e não secantes a uma reta dada. Em 1854, Riemann[4] apresentava uma geometria em que duas retas eram sempre concorrentes. Estas duas geometrias não euclidianas são conhecidas como hiperbólica (a primeira) e elítica (a segunda). Naturalmente que as noções de ângulo e de distância são diferentes. Na geometria de Lobachevski-Bolyai a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a 180° e na de Riemann é superior a 180°.

A-11 — Por um ponto não pertencente a um plano passa um, e apenas um, plano paralelo ao primeiro.

1.3 — DIREÇÃO

Ao conjunto de todas as retas paralelas a uma reta *r* damos o nome de *direção* de *r* (Dir. (*r*)).

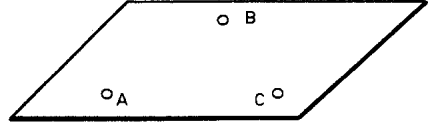
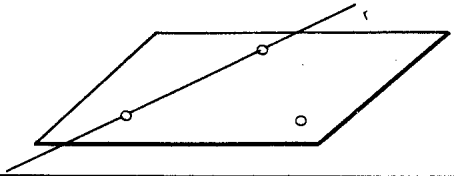
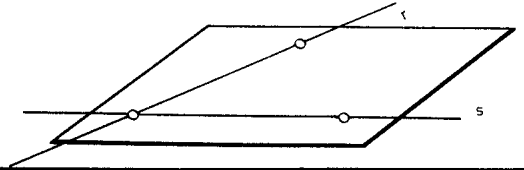
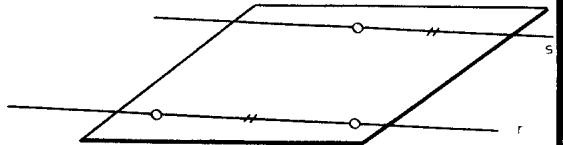
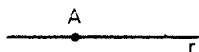
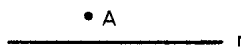
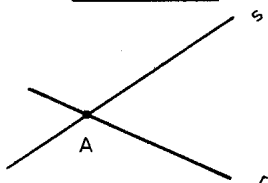
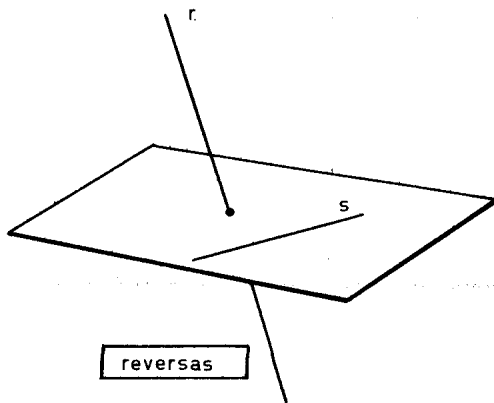
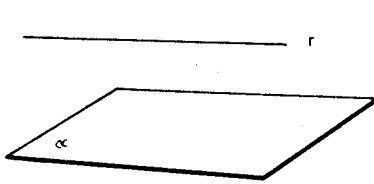
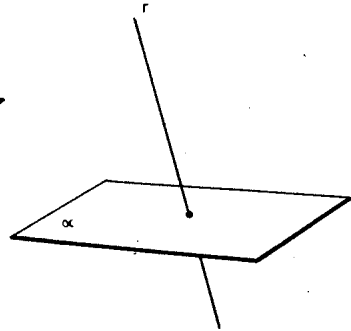
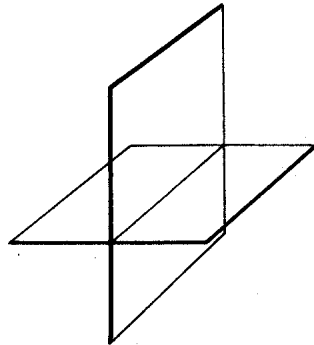
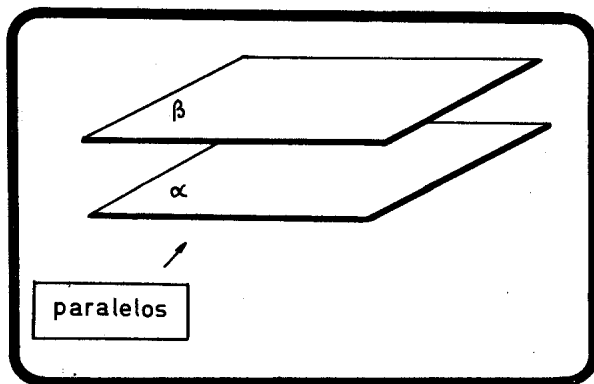
Por extensão, consideramos retas coincidentes como paralelas (não distintas). Assim, é verdadeira a afirmação: duas retas de uma mesma direção são paralelas.

1.4 — DETERMINAÇÃO DO PLANO

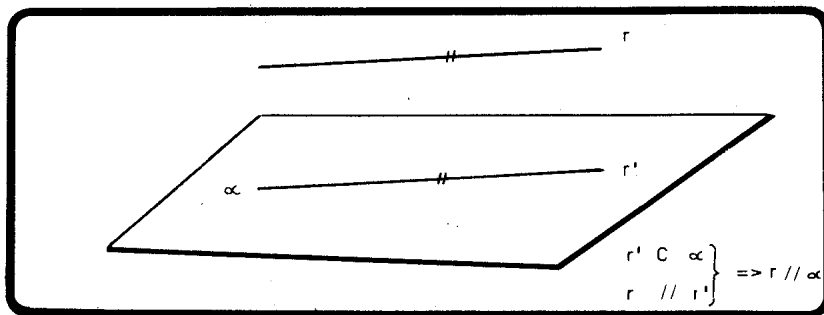
De acordo com os axiomas anteriores, e sendo A, B e C três pontos não colineares, podemos concluir que um plano fica determinado por:

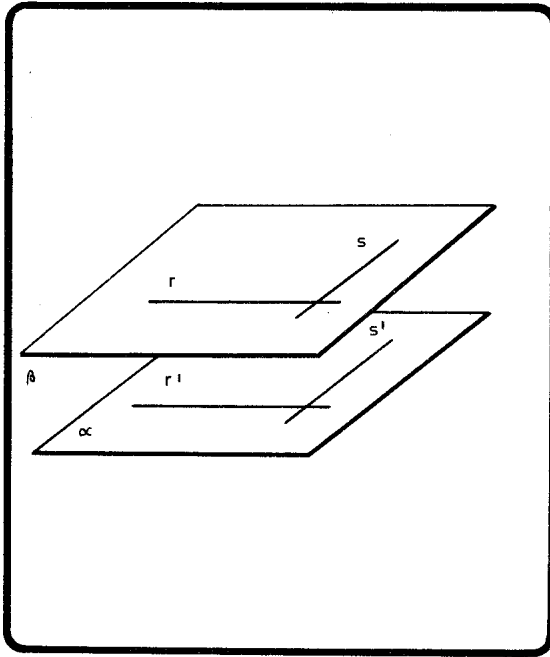
---

4. G. F. B. Riemann (1826–1866)

a) Três pontos não colineares

b) Uma reta e um ponto não pertencente a essa reta

c) Duas retas concorrentes

d) Duas retas paralelas distintas

1.5 — POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE OS ELEMENTOS PRIMITIVOS

d reta e plano
r
α
paralela
r
α
secante
r
α
contida
e plano e plano
α = β
coincidentes
secantes

1.6 — CONDIÇÕES DE PARALELISMO

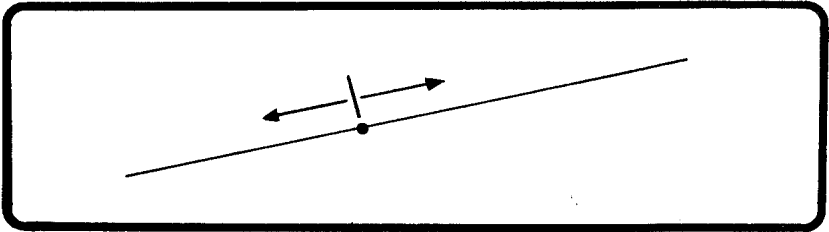
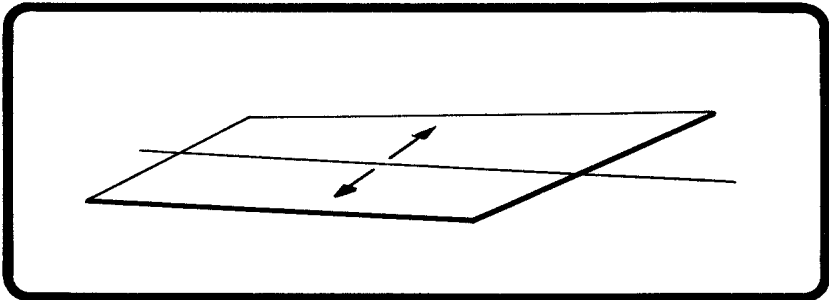
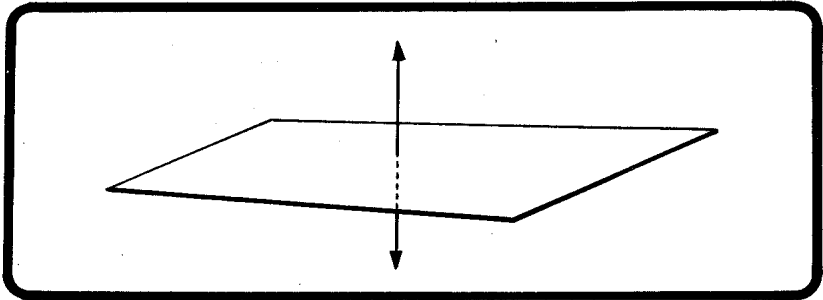
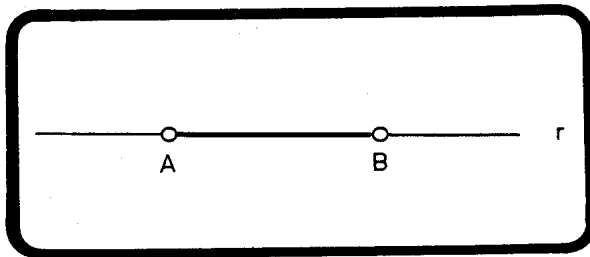
a) reta e plano

Se uma reta é paralela a uma reta de um plano, ela é paralela a esse plano.

b) plano e plano

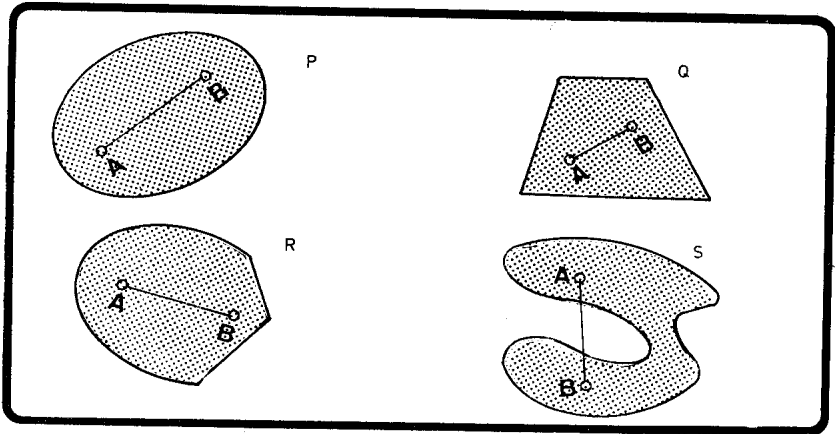
Se duas retas concorrentes *r* e *s* são respectivamente paralelas a duas retas *r'* e *s'* de um plano α, o plano determinado por *r* e *s* é paralelo a α.

s
r
s'
β
r'
α
r e s →
r // r' concorrentes =>
s // s'
=> β //α

CAPÍTULO 2

2.1 — DEFINIÇÕES

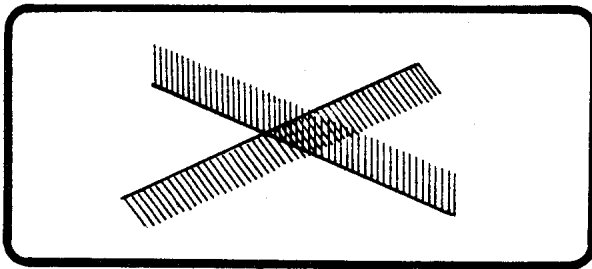
2.1.1 — Um ponto de uma reta divide a mesma em dois conjuntos de pontos chamados SEMI-RETAS, sendo o ponto de divisão chamado ORIGEM ou FRONTEIRA de cada semi-reta.

2.1.2 — Uma reta de um plano divide o mesmo em dois conjuntos de pontos chamados SEMIPLANOS, sendo a reta de divisão chamada ORIGEM ou FRONTEIRA de cada semiplano.

2.1.3 — Um plano qualquer divide o espaço em dois conjuntos de pontos chamados SEMI-ESPAÇOS, sendo o plano de divisão chamado ORIGEM ou FRONTEIRA de cada semi-espaço.

2.1.4 — Dados dois pontos A e B em uma reta *r*, chama-se segmento $\overline{AB}$ ao conjunto de pontos de *r* entre A e B, que são os extremos do segmento.

A reta *r* é o suporte do segmento $\overline{AB}$.

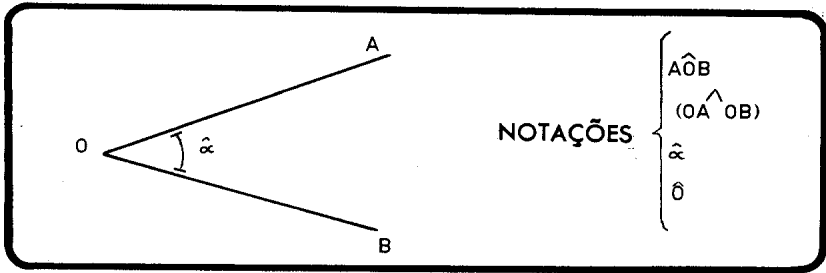
2.2 — CONJUNTOS CONVEXOS

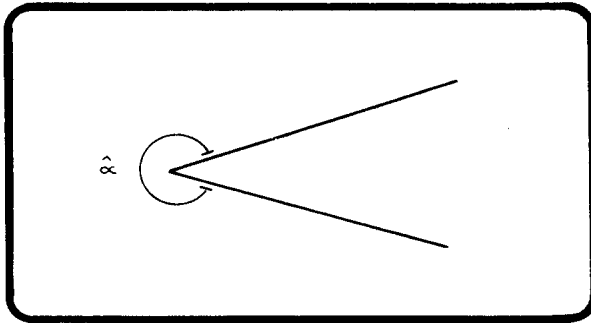
Um conjunto de pontos é convexo se, para todo par de pontos A e B do conjunto, o segmento $\overline{AB}$ está inteiramente contido no conjunto.

Assim, os conjuntos P, Q e R são *convexos*, e S é *não convexo*.

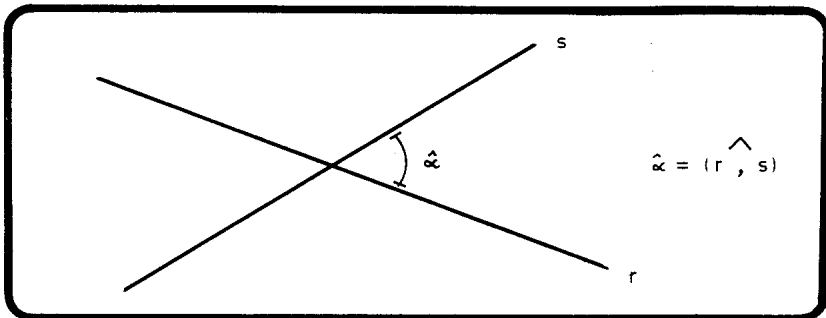
Devemos notar que assim como reta, plano e espaço são conjuntos convexos, semi-reta, semiplano e semi-espaço são também conjuntos convexos.

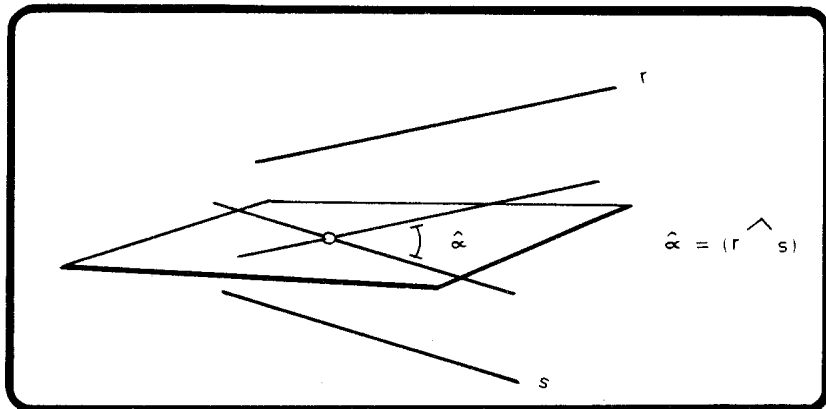
2.3 — SETOR ANGULAR CONVEXO

É a interseção de dois semiplanos de fronteiras concorrentes.

2.4 — ÂNGULO

a) É a figura formada por duas semi-retas de mesma origem.

b) Um ângulo determina dois setores angulares, um convexo e outro não, caso as semi-retas que o formam não sejam opostas.

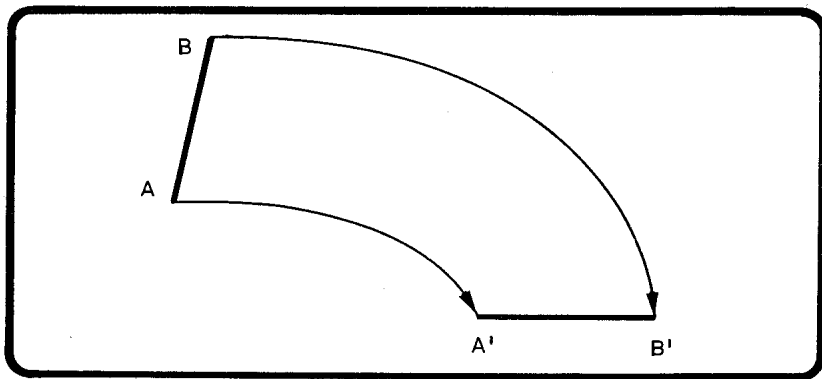
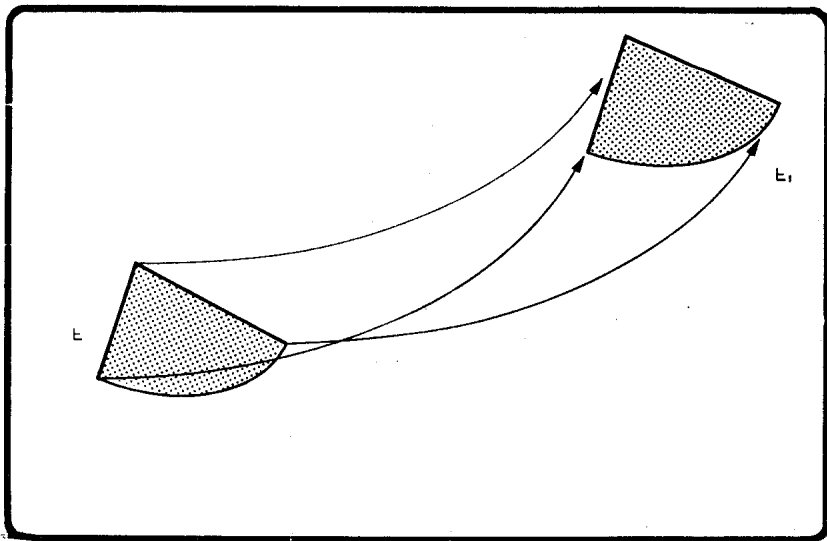
c) A notação $\widehat{\alpha}$ é a única que os distingue. No caso anterior, vemos que o ângulo associa um setor convexo. Um ângulo associa um setor não convexo quando estiver representado como abaixo.

2.5 — ÂNGULO DE DUAS RETAS

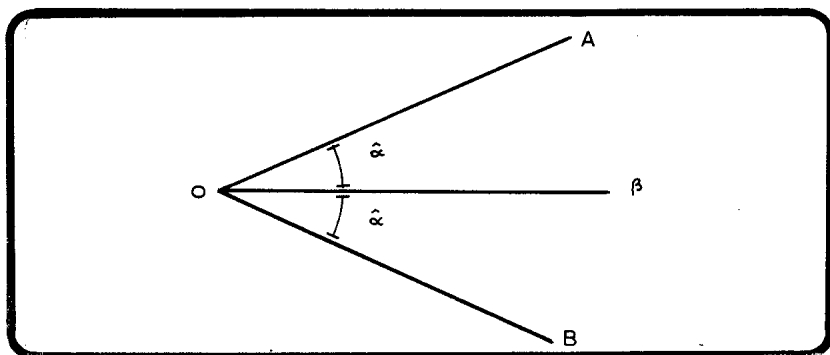
É o menor ângulo formado por elas.

2.6 — ÂNGULO ENTRE REVERSAS

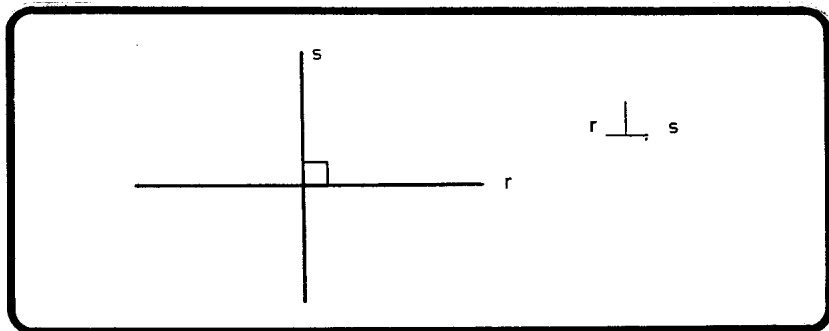
É o ângulo formado por duas concorrentes, respectivamente, paralelas às duas primeiras.

2.7 — RETAS ORTOGONAIS

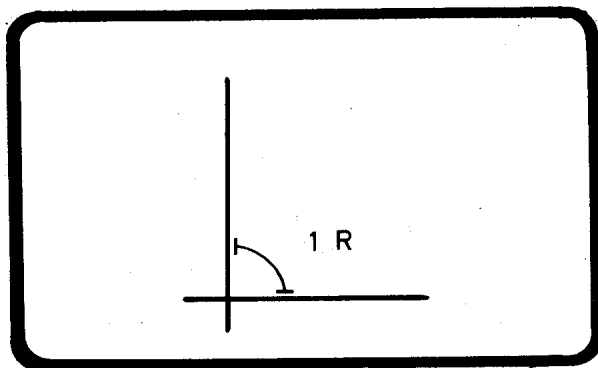
Duas retas são ortogonais quando são reversas e o ângulo por elas formado é reto.

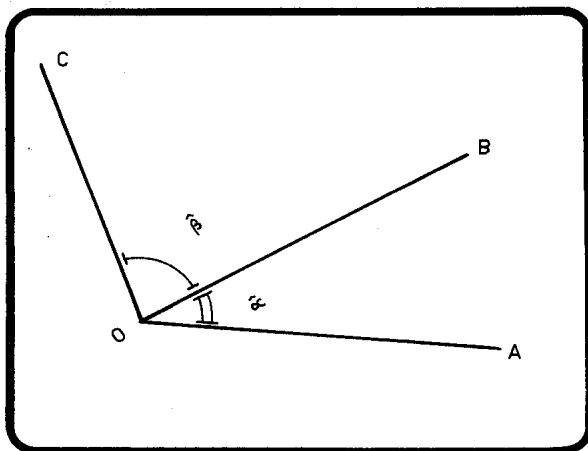
2.8 — CONGRUÊNCIA

a) *Dois segmentos são congruentes* quando podem ser levados a coincidir por superposição, mediante um deslocamento rígido de um deles.

b) *Duas figuras são congruentes* quando podem ser levadas a coincidir por superposição, mediante um deslocamento rígido de uma delas.

2.9 — BISSETRIZ

Bissetriz de um ângulo é a semi-reta que o divide em dois outros congruentes.

2.10 — RETAS PERPENDICULARES

Duas retas são perpendiculares quando são concorrentes e formam quatro ângulos congruentes.

2.11 — ÂNGULO RETO

Qualquer dos ângulos formados pelas retas perpendiculares chama-se *ângulo reto*.

2.12 — ÂNGULOS ADJACENTES

Dois ângulos são adjacentes quando possuem o mesmo vértice e um lado comum, estando os outros dois lados em semiplanos opostos, cuja fronteira é o suporte do lado comum.

O ângulo $A\widehat{O}C$ é o ângulo soma dos ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$.

Definimos: $A\widehat{O}C = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$.

2.13 — DEFINIÇÕES

a) α é um ângulo:

1) *agudo* se $\widehat{\alpha} < 1\ R$
2) *obtuso* se $\widehat{\alpha} > 1\ R$

b) Dois ângulos $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ são:

1) complementares se $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 1\ R$
2) suplementares se $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 2\ R$
3) replementares se $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 4\ R$
4) Explementares se $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 3\ R$

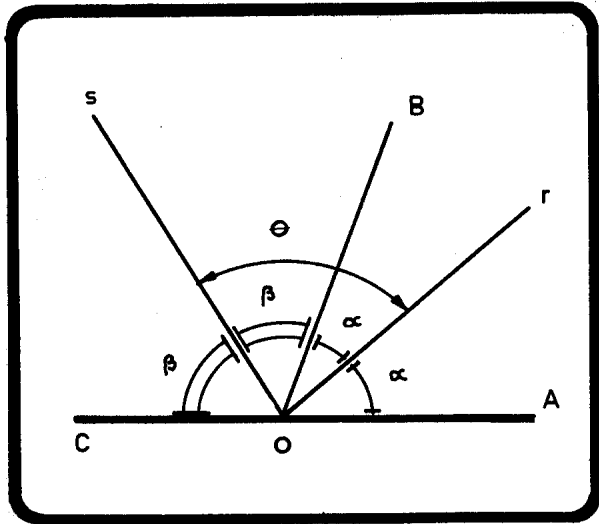
2.14 — TEOREMA

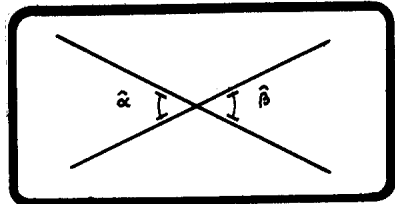
As bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares.

H — $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ são ângulos adjacentes suplementares.

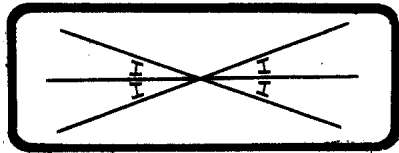
— r e s são bissetrizes desses dois ângulos.

T — $(r \widehat{,} s) = 1\ R$.

$$D - 2\widehat{\alpha} + 2\widehat{\beta} = 2R.$$
$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = R$$
$$\theta = \widehat{R}$$

2.15 — ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

a) Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um são as semi-retas opostas dos lados do outro.

b) Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

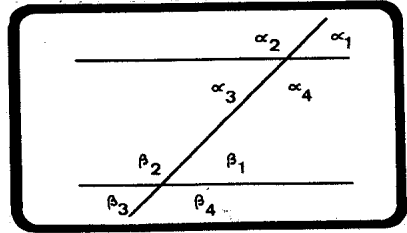
c) As bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semi-retas opostas.

2.16 — ÂNGULOS NAS PARALELAS

a) Denominações

alternos internos $\begin{cases} \widehat{\alpha}_3 \text{ e } \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\alpha}_4 \text{ e } \widehat{\beta}_2 \end{cases}$

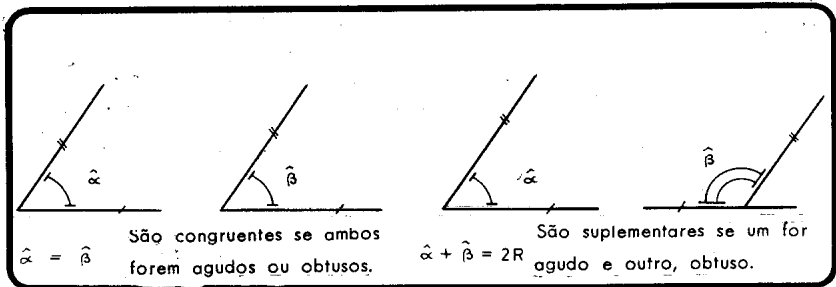
alternos externos $\begin{cases} \widehat{\alpha}_2 \text{ e } \widehat{\beta}_4 \\ \widehat{\alpha}_1 \text{ e } \widehat{\beta}_3 \end{cases}$

colaterais internos $\begin{cases} \widehat{\alpha}_4 \text{ e } \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\alpha}_3 \text{ e } \widehat{\beta}_2 \end{cases}$

colaterais externos $\begin{cases} \widehat{\alpha}_1 \text{ e } \widehat{\beta}_4 \\ \widehat{\alpha}_2 \text{ e } \widehat{\beta}_3 \end{cases}$

correspondentes $\begin{cases} \widehat{\alpha}_1 \text{ e } \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\alpha}_2 \text{ e } \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\alpha}_3 \text{ e } \widehat{\beta}_3 \\ \widehat{\alpha}_4 \text{ e } \widehat{\beta}_4 \end{cases}$

b) Propriedades

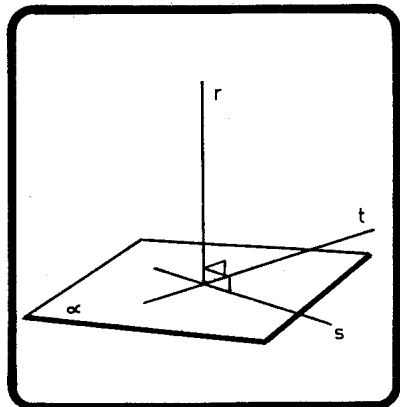
1) Os ângulos alternos são congruentes.
2) Os ângulos correspondentes são congruentes.
3) Os ângulos colaterais são suplementares.

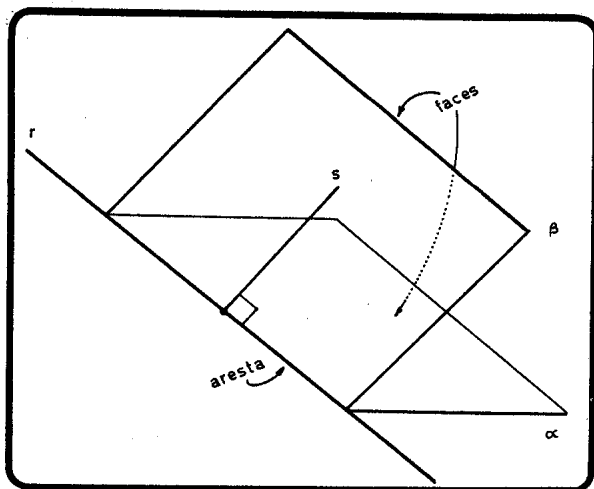
2.17 — ÂNGULOS DE LADOS PARALELOS

2.18 — ÂNGULOS DE LADOS PERPENDICULARES

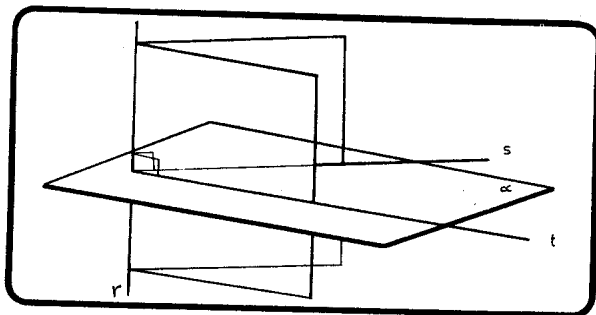
2.19 — RETA PERPENDICULAR A PLANO

a) Uma reta é perpendicular a um plano quando é perpendicular ou ortogonal a todas as retas do plano.

b) Se uma reta é perpendicular ou ortogonal a duas retas concorrentes, ela é perpendicular ao plano definido pelos concorrentes.

$$\left.\begin{array}{l} r \perp s \\ r \perp t \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r \perp \alpha.$$

2.20 — DIEDRO

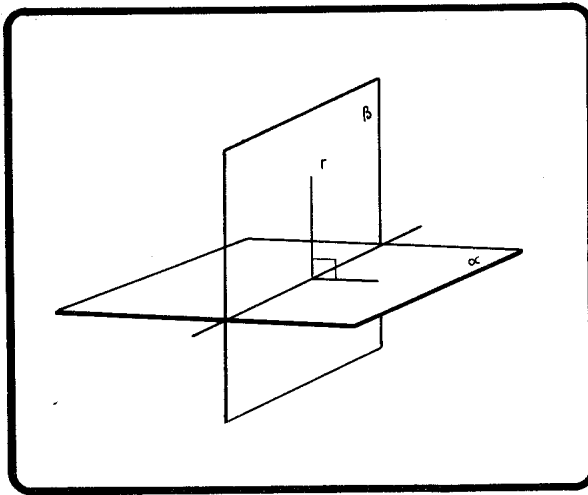
a) É a figura formada por dois semiplanos de mesma fronteira.

b) A reta s de β perpendicular à fronteira r é chamada *reta de maior declive de β em relação a α.*

c) *Retilíneo* de um diedro é o ângulo formado pelas retas de maior declive de um plano em relação ao outro.

d) As retas de maior declive s e t determinam um plano α perpendicular à aresta r. Assim, o *retilíneo* de um diedro é o ângulo obtido pela interseção de um plano perpendicular à aresta.

2.21 — BISSETOR DE UM DIEDRO

É o semiplano que divide o diedro em dois diedros congruentes.

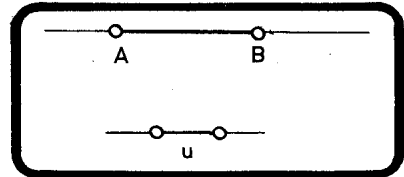
2.22 — PLANOS PERPENDICULARES

a) Dois planos são perpendiculares quando formam quatro diedros congruentes.

b) Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer plano que a contenha é perpendicular ao plano dado.

$$\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha \\ r \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$$

2.23 — A MEDIDA DE UM SEGMENTO

2.23.1 — Medir um segmento é compará-lo com um outro tomado como unidade.

Daí resulta um número a que chamaremos de medida do segmento $\overline{AB}$ na unidade u, ou *distância* entre os pontos A e B.

$AB = mu \quad , m \in R_+$

u = unidade

m = medida do segmento na unidade u.

OBSERVAÇÃO: representaremos por AB a medida do segmento $\overline{AB}$.

2.23.2 — AXIOMA DA DISTÂNCIA

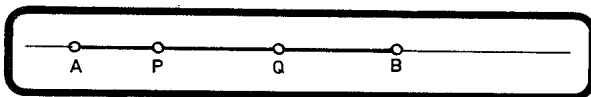
A cada par de pontos corresponde um único número positivo ou nulo.

a — O axioma da distância leva em conta que a unidade já foi arbitrada anteriormente.

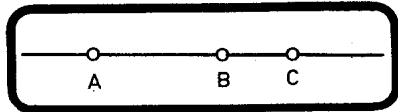
b — Ao considerarmos os pontos A e B, admitimos a possibilidade de $A \equiv B$. Neste caso,

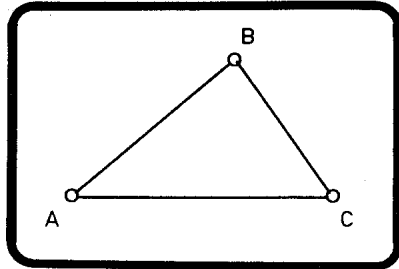
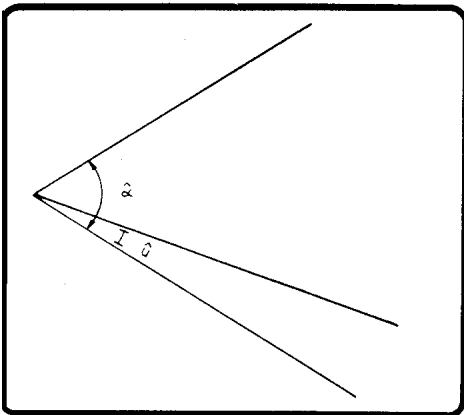
$$AB = 0$$

c — Ao consideràrmos quatro pontos colineares A, B, P e Q, pode acontecer que $\overline{PQ} \subset \overline{AB}$. Neste caso,

$$PQ \leqslant AB$$

d — A distância é definida para um par de pontos e não depende da ordem em que esses pontos são mencionados. Portanto, teremos AB = BA sempre.

2.23.3 — **AXIOMA DA ORDEM** (SOMA DE SEGMENTOS)

Para três pontos colineares, A, B e C, dados nesta ordem, temos AC = AB + BC.

2.23.4 — AXIOMA DA MENOR DISTÂNCIA

Dados três pontos, A, B e C não colineares, tem-se AC < AB + BC.

2.24 — MEDIDA DE ÂNGULOS

$\hat{\alpha} = m\,\hat{u}$

$\hat{u}$ = unidade de medida angular.

m = medida de ângulo $\hat{\alpha}$

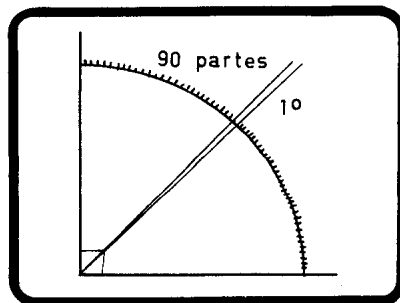
a) SISTEMA SEXAGESIMAL

unidade — *grau*

$$1^\circ = \frac{1}{90}\,\widehat{R}$$

subunidades — *minuto*

$$1' = \frac{1}{60} \text{ do grau}$$

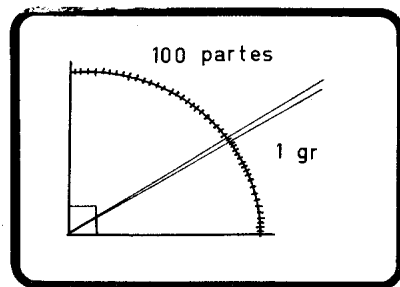
— *segundo* $\quad 1'' = \frac{1}{60}$ do minuto

b) SISTEMA DECIMAL

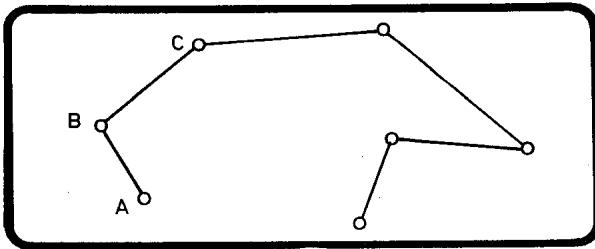
unidade — *grado*

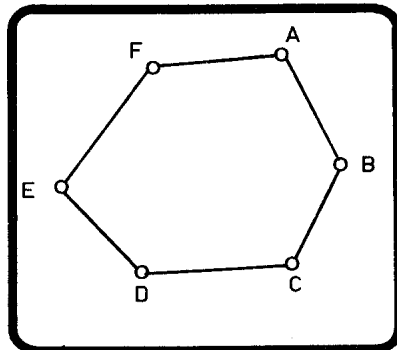
$$1 \text{ gr} = \frac{1}{100}\, R$$

subunidades — *decígrado* $\quad 1 \text{ dgr} = \frac{1}{10}$ do gr

centígrado, $\quad 1 \text{ cgr} = \frac{1}{100}$ do gr

milígrado, $\quad 1 \text{ mgr} = \frac{1}{1000}$ do gr

3.1 — LINHA POLIGONAL — POLÍGONO

Dados vários pontos, A, B, C, D. . . . . . L em ordem e de forma que três consecutivos não sejam colineares, a figura formada pela reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... $\overline{JL}$ chama-se LINHA POLIGONAL ABERTA e os pontos A e L, extremos

Unindo-se os extremos por um segmento, obtemos uma linha poligonal fechada, ou *POLÍGONO*.

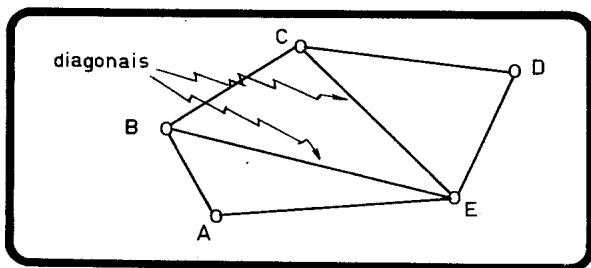
Em um polígono, temos:

a) A, B, C, . . . F vértices.

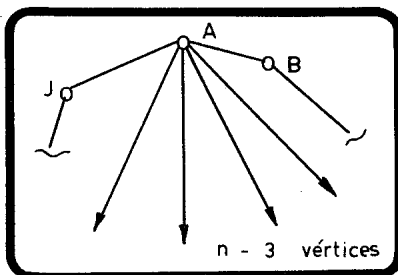
b) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ . . . $\overline{EF}$, $\overline{FA}$ lados.

c) *Perímetro* (2p) é a soma dos comprimentos de todos os lados.

d) *Gênero* (n) de um polígono é o número de lados.

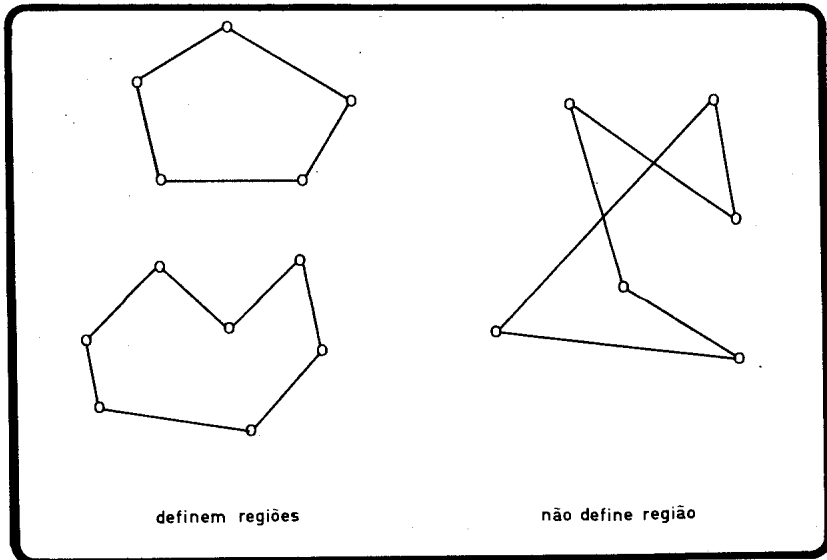
e) *Vértices adjacentes.* Dois vértices P e Q são adjacentes se, e somente se, $\overline{PQ}$ é lado.

f) *Diagonal* de um polígono é o segmento de reta que une dois vértices não adjacentes.

3.2 — NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

Seja um polígono A, B, C. . . J de gênero *n*.

Escolhendo um determinado vértice (A, p. ex.), verificamos que por esse vértice podemos traçar n — 3 diagonais. A mais simples aritmética nos diz que pelos n vértices poderemos traçar n(n — 3) diagonais. Neste raciocínio há um erro, pois uma diagonal qualquer XY foi contada duas vezes, tanto partindo de X, quanto de Y. Assim, o número de diagonais de um polígono é dado por

$$d = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

3.3 — REGIÃO POLIGONAL

Desde que dois lados não consecutivos de um polígono não se cortem, o polígono define uma região do plano a que chamaremos de *região poligonal*. Quando um polígono não define uma região, dizemos que o polígono é *entrecruzado*.

3.4 — CLASSIFICAÇÃO DOS POLÍGONOS

a) *Quanto à região*

Um polígono é *convexo* caso sua região poligonal seja uma figura *convexa*. Em caso contrário, ele é dito *não convexo*.

b) *Quanto ao gênero*

De acordo com o gênero, os polígonos podem receber as denominações

$n = 3 \rightarrow$ triângulo

$n = 4 \rightarrow$ quadrilátero

$n = 5 \rightarrow$ pentágono

$n = 6 \rightarrow$ hexágono

$n = 7 \rightarrow$ heptágono

$n = 8 \rightarrow$ octógono

$n = 9 \rightarrow$ eneágono

$n = 10 \rightarrow$ decágono

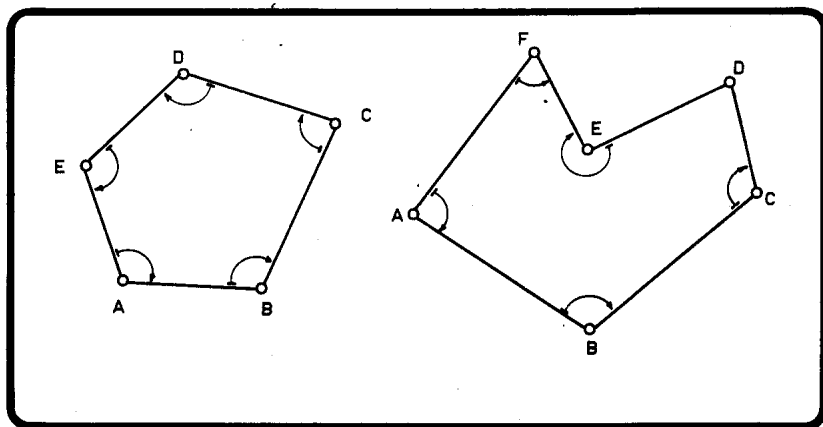
$n = 11 \rightarrow$ undecágono

$n = 12 \rightarrow$ dodecágono

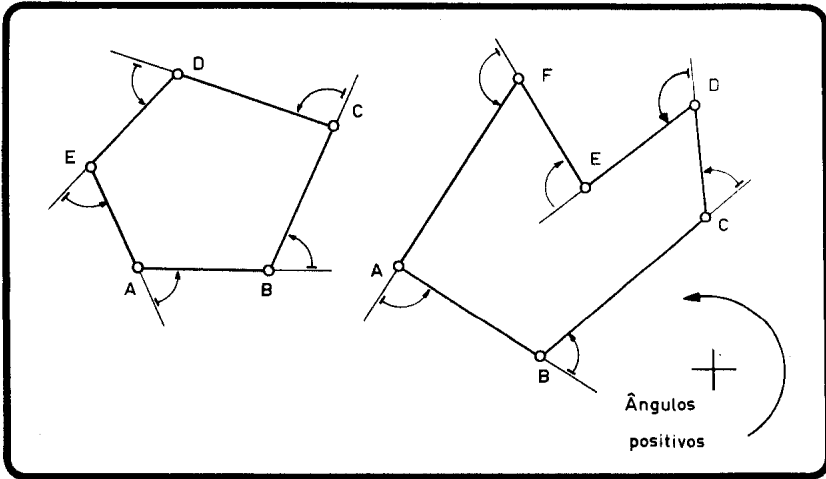
$n = 15 \rightarrow$ pentadecágono

$n = 20 \rightarrow$ icoságono

3.5 — ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO

Em um polígono A, B, C ... que define uma região poligonal, os ângulos $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}D$, etc., localizados no interior da região, são chamados *ângulos internos*.

Os ângulos internos serão notados por: $\widehat{i}_A$, $\widehat{i}_B$, $\widehat{i}_C$ ...

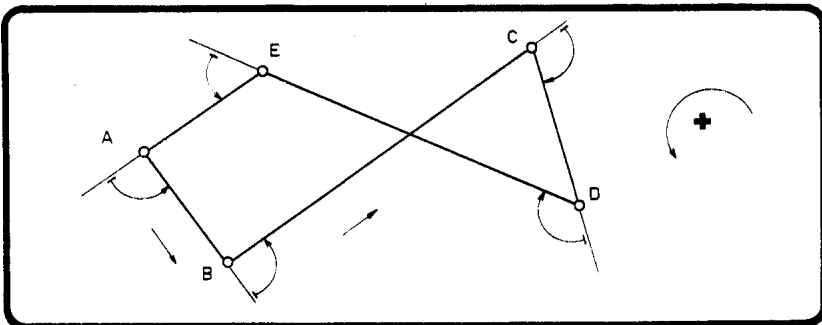
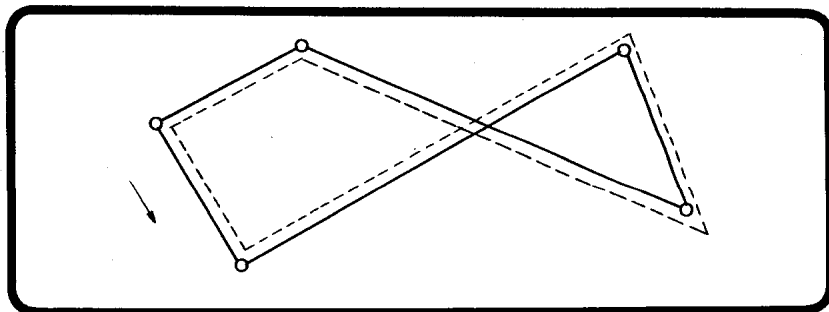
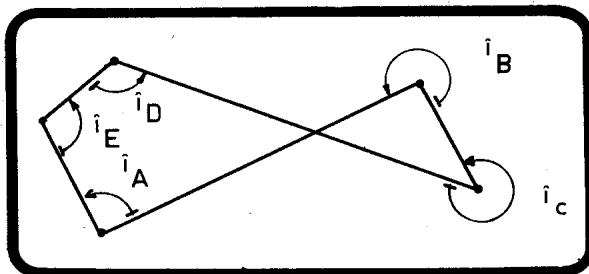
3.6 — ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO

Em um polígono qualquer, percorrendo-o em uma determinada direção, ao ângulo formado pelo prolongamento de um determinado lado com o lado seguinte, chama-se *ângulo externo*.

Os ângulos externos serão notados por: $\widehat{e}_A$, $\widehat{e}_B$, $\widehat{e}_C$ . . .

3.7 — OBSERVAÇÕES

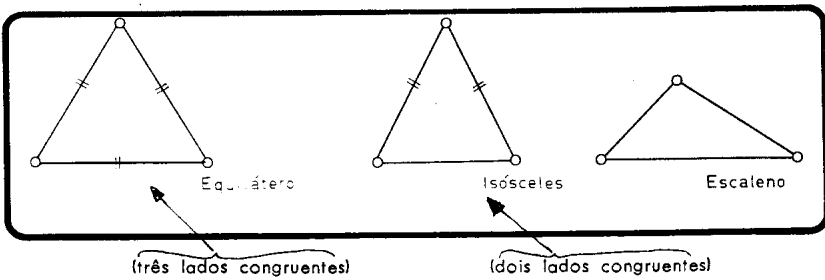
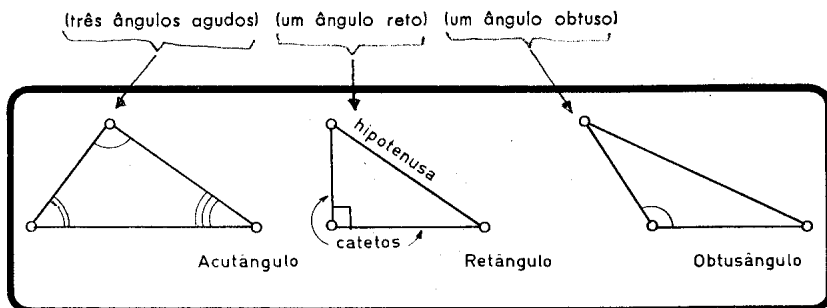
a) Um polígono é *eqüilátero* quando seus lados forem congruentes.
b) Um polígono é *eqüiângulo* quando seus ângulos internos forem congruentes.
c) Um polígono é *regular* quando for eqüilátero e eqüiângulo.

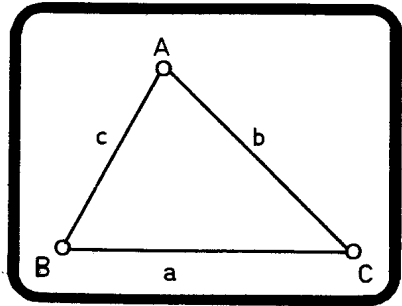
3.8 — EXTENSÃO DO CONCEITO DE POLÍGONO

Consideremos um polígono entrecruzado qualquer. Os *ângulos externos* são colocados de acordo com a definição anterior.

Para localizar os *ângulos internos*, vamos percorrer o polígono e marcar, de um mesmo lado (à esquerda de quem percorre o polígono, p. ex.), uma região a que chamaremos de "interior".

Os *ângulos internos* são marcados do lado da linha tracejada e de tal forma que, passando por um vértice, marcamos o ângulo que o segundo lado deve girar para que possua direção e sentido do anterior (v. figura).

CAPÍTULO 4

TRIÂNGULOS

4.1 — CLASSIFICAÇÕES

a) Quanto aos lados

b) Quanto aos ângulos

4.2 — CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

Sejam a, b e c os comprimentos dos lados do triângulo ABC. Tomando como verdadeira a afirmação que "a menor distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os une", chegamos facilmente a:

$$\boxed{\begin{array}{c} a < b + c \\ \text{e} \\ a > |b - c| \end{array}} \quad a, b, c \text{ reais positivos.}$$

Assim, se dois lados de um triângulo medem 10 e 2, para que o triângulo exista, o terceiro lado deverá satisfazer às condições:

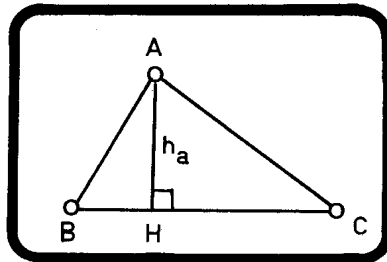
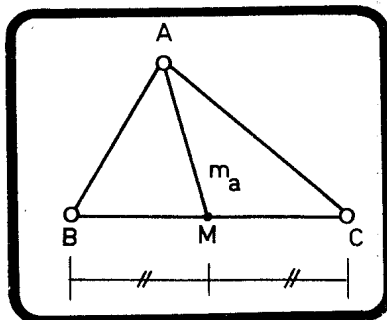
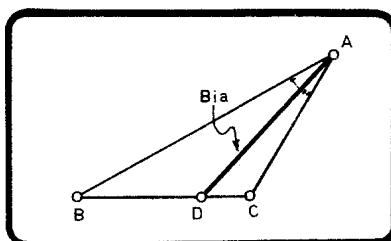
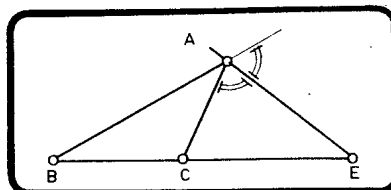
$$\left.\begin{array}{l} c < 10 + 2 \\ c > |10 - 2| \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad c < 12 \text{ e } c > 8 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 8 < c < 12.$$

4.3 — PRINCIPAIS CEVIANAS

Ceviana é qualquer reta que passa por um vértice de um triângulo. As principais são:

a) altura (h)

b) mediana (m)

c) bissetriz interna (β_i)

d) bissetriz externa (β_e)

Observação

Quando escrevemos por exemplo h_a, poderemos nos referir:

— ao segmento $\overline{AH}$

— à medida do segmento $\overline{AH}$

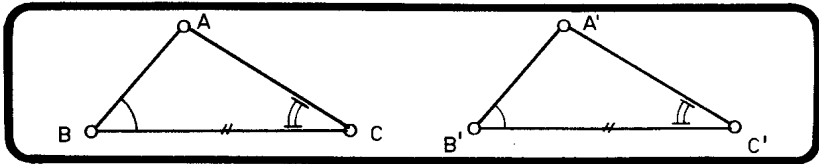
— à reta que contém A e H.

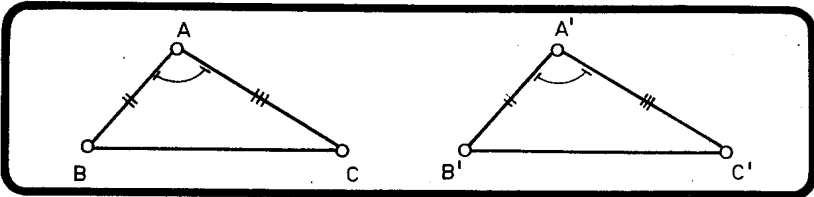
Faremos assim para a simplificação das notações, mas o seu sentido correto estará sempre claro no contexto.

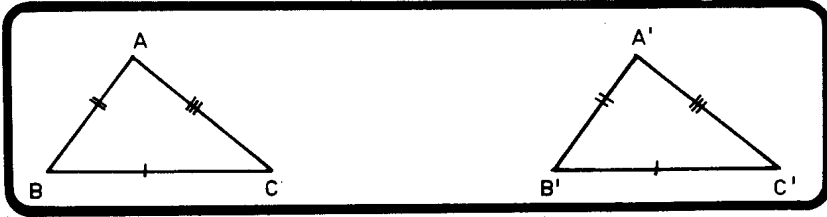
4.4 — CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

a) Triângulos quaisquer.

Dois triângulos quaisquer são congruentes se for verificada uma das condições seguintes:

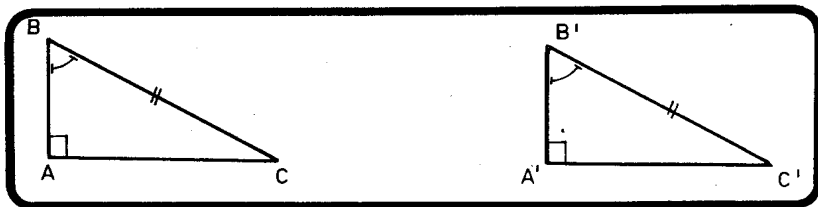
1 — "Um lado e os dois ângulos adjacentes respectivamente congruentes." (ÂLÂ)

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

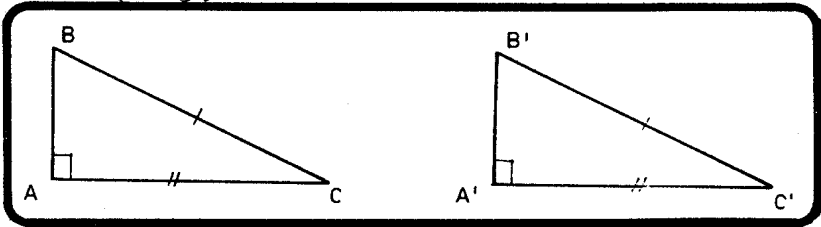
2 — "Dois lados e o ângulo compreendido respectivamente congruentes." (LÂL)

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{A'} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

3 — "Três lados respectivamente congruentes." (LLL)

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ BC = \overline{B'C'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta\, ABC = \Delta\, A'B'C'.$$

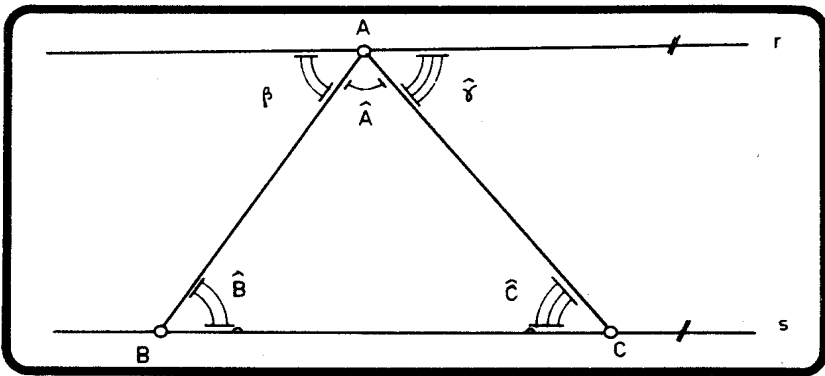
b) Triângulos retângulos.

Dois triângulos retângulos são congruentes se for verificada uma das condições seguintes:

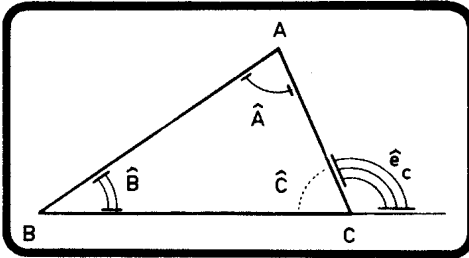
1 — "A hipotenusa e um ângulo agudo respectivamente congruentes." (h Â)

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A}' = 90^\circ \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle\, ABC \equiv \triangle\, A'B'C'.$$

2 — "A hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes."

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

4.5 — 1.ª LEI DE THALES

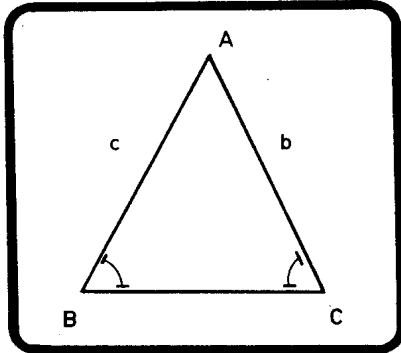
A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

$$r // s \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{\beta} \\ \hat{C} = \hat{\gamma} \end{array}\right\}$$

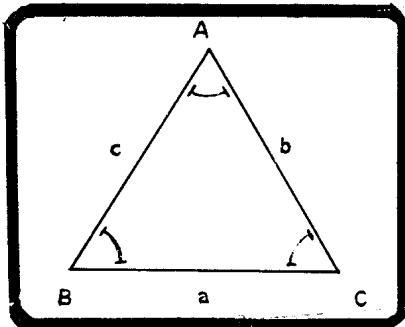
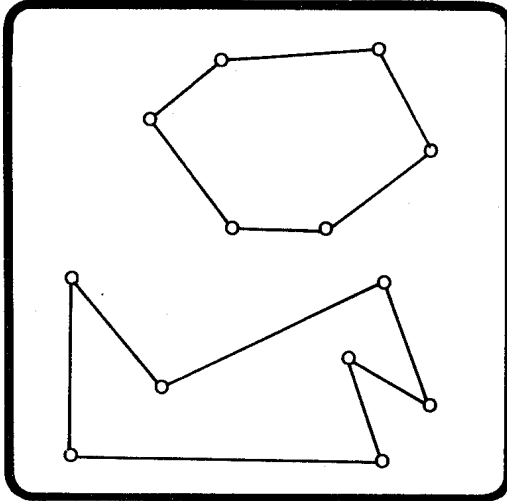
$$\hat{A} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180^\circ \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ}$$

4.6 — ÂNGULO EXTERNO DE UM TRIÂNGULO

Um ângulo externo de um triângulo é a soma dos dois internos não adjacentes.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ\\ \widehat{e}_c+\widehat{C}=180^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\widehat{e}_c=\widehat{A}+\widehat{B}}$$

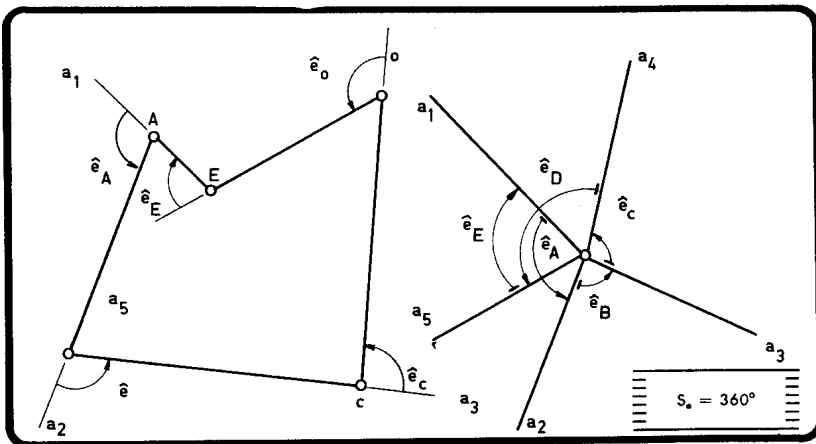
4.7 — O TRIÂNGULO ISÓSCELES

$$b = c \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\widehat{B}=\widehat{C}\\ \\ m_a = h_a = \beta_{ia}\end{array}\right.$$

4.8 — O TRIÂNGULO EQÜILÁTERO

$$a = b = c \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=60^\circ\\ \\ h = m = \beta_i\end{array}\right.$$

4.9 — SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO NÃO ENTRECRUZADO

$$S_i = 180° (n - 2)$$

onde n é o gênero do polígono.

4.10 — SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO NÃO ENTRECRUZADO

De acordo com a orientação dos ângulos externos dada em

4.11 — POLÍGONOS EQUIÂNGULOS

Em polígonos equiângulos, como os ângulos internos são congruentes e, conseqüentemente, também os externos, teremos para cada ângulo:

$$\hat{i} = \frac{180° (n - 2)}{n}$$

$$\hat{e} = \frac{360°}{n}.$$

CAPÍTULO 5

PRINCIPAIS QUADRILÁTEROS

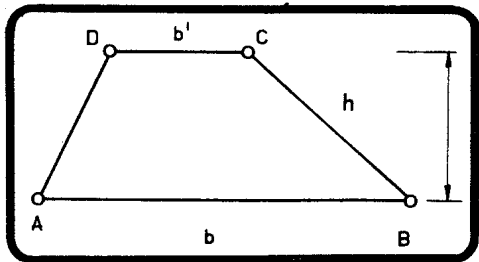
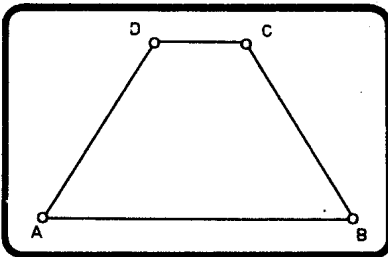
5.1 — TRAPÉZIO

Definição

É o quadrilátero que possui um par de lados paralelos.

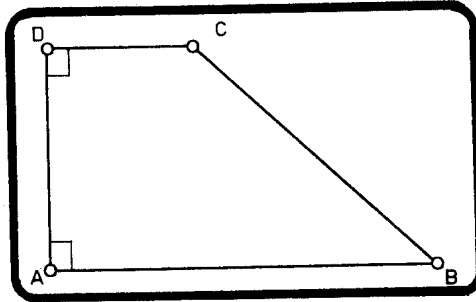
ESCALENO

b, b′ = comprimentos das bases

h = altura

ISÓSCELES

AD = BC ⟹

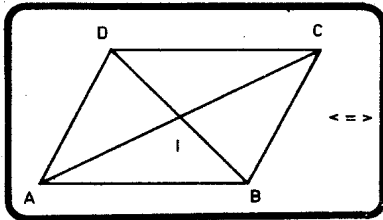
⟹ $\hat{A} = \hat{B}$

$\hat{C} = \hat{D}$

RETÂNGULO

$\hat{A} = \hat{D} = 90°.$

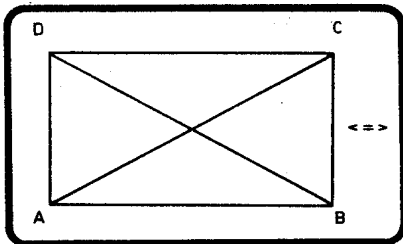
5.2 — PARALELOGRAMO

Definição

É o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.

1) Quadrilátero que possui os lados opostos congruentes.
2) Quadrilátero que possui ângulos opostos congruentes.
3) Quadrilátero em que dois ângulos adjacentes são sempre suplementares.
4) Quadrilátero cujas diagonais cortam-se ao meio. ($AI = IC$ e $DI = IB$).

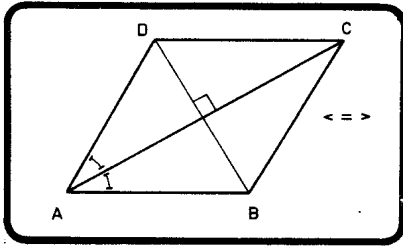
5.3 — RETÂNGULO

Definição

É o quadrilátero em que os quatro ângulos são congruentes.

1) É o paralelogramo equiângulo.
2) É o paralelogramo que possui um ângulo reto.
3) É o paralelogramo que possui diagonais congruentes.

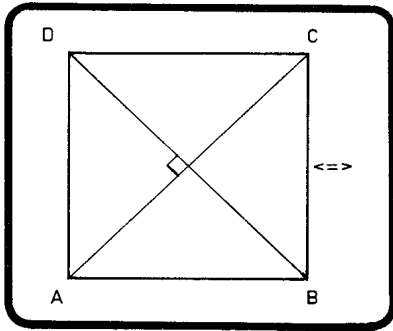
5.4 — LOSANGO

Definição

É o quadrilátero que possui os 4 lados congruentes.

1) É o paralelogramo que possui diagonais perpendiculares.
2) É o paralelogramo que possui dois lados consecutivos congruentes.
3) É o paralelogramo em que as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos.

5.5 — QUADRADO

Definição

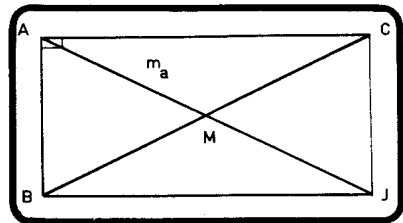
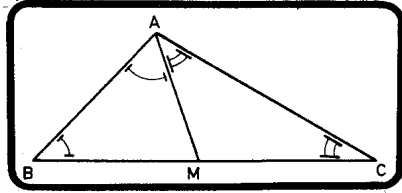
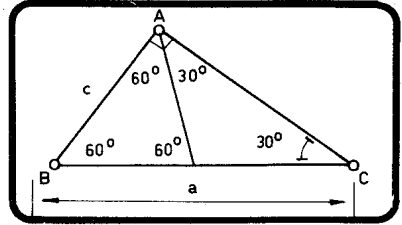
É o quadrilátero regular (v. definição em 3.7C.).

1) É o retângulo eqüilátero.

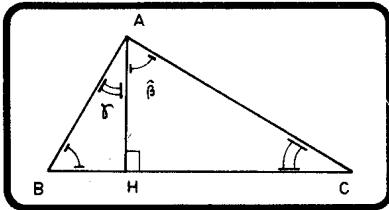
2) É o losango equiângulo.

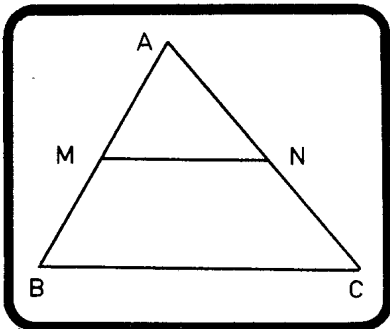
5.6 — OBSERVAÇÕES

a) A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.

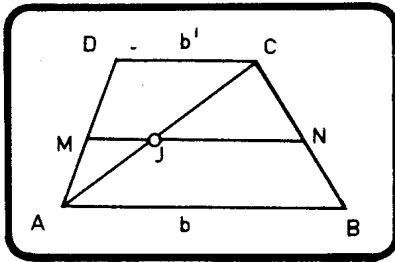
De fato,

$$AM = \frac{1}{2} AJ \implies \boxed{m_a = \frac{1}{2} BC}$$

b) A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo divide o mesmo em dois triângulos isósceles.

c) No triângulo retângulo que possui um ângulo de 30°, o cateto oposto a esse ângulo vale metade da hipotenusa.

$$c = \frac{a}{2}.$$

d) A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo divide o ângulo reto em dois outros iguais aos ângulos agudos do triângulo.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = 90^\circ \\ \overline{AH} \perp BC\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{\beta} \\ \hat{C} = \hat{\alpha}.\end{array}\right.$$

e) O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e vale metade deste.

$$\left.\begin{array}{l}M \text{ médio de } \overline{AB} \\ N \text{ médio de } \overline{AC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ MN = \frac{1}{2}BC.\end{array}\right.$$

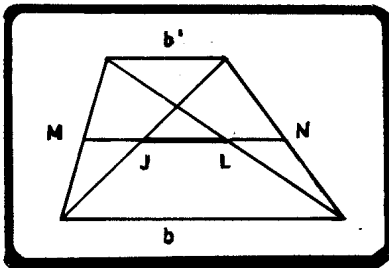
f) *Base média de um trapézio*

É o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio.

$\overline{MN} \,//\, \overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

$$\begin{cases} MJ = \dfrac{1}{2} b' \\ JN = \dfrac{1}{2} b. \end{cases}$$ Somando,

$$MN = \boxed{b_m = \frac{b + b'}{2}}$$

g) *Mediana de Euler* de um trapézio*

É o segmento que une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero.

$JL = m_e$ (mediana de Euler*)

$$ML = \frac{b}{2}$$

$$MJ = \frac{b'}{2} \quad (-)$$

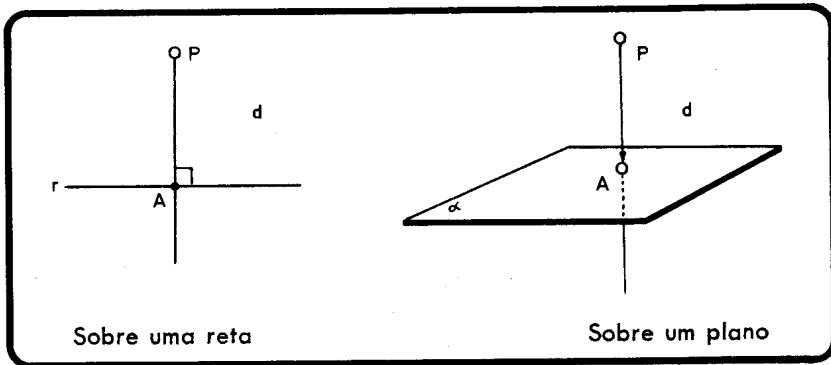
$$JL = \boxed{m_e = \frac{b - b'}{2}}$$

---

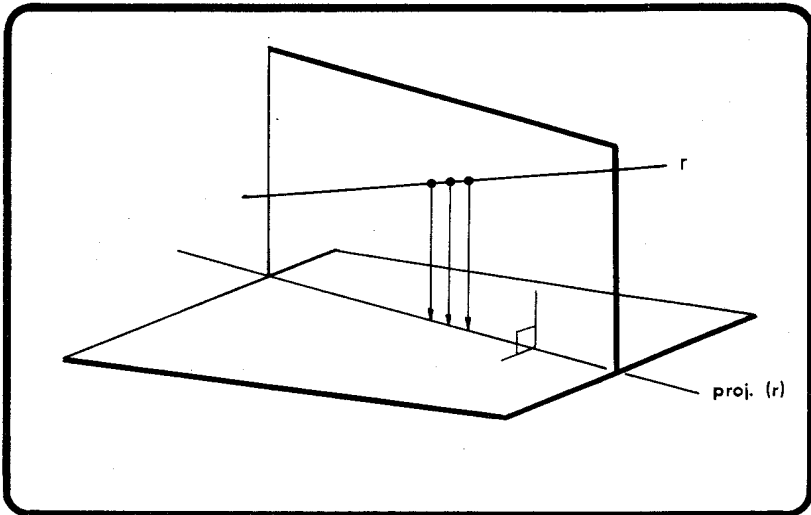
* Leonhard Euler (1707-1783) foi um dos maiores matemáticos do século XVIII. Membro da Academia de Ciências de São Petersburgo, onde substituiu Bernoulli (1733), e da Academia de Ciências de Berlim (1741). Euler deu contribuições importantíssimas a quase todos os ramos da Matemática.

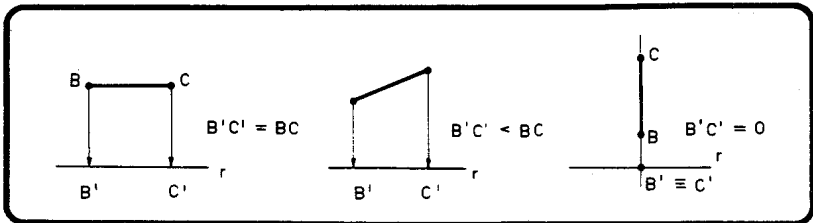
CAPÍTULO 6

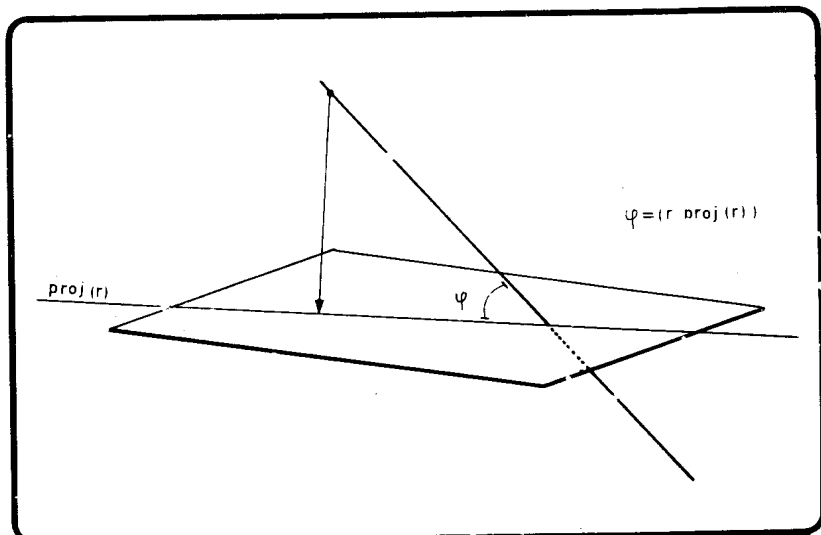
6.1 — PROJEÇÕES ORTOGONAIS

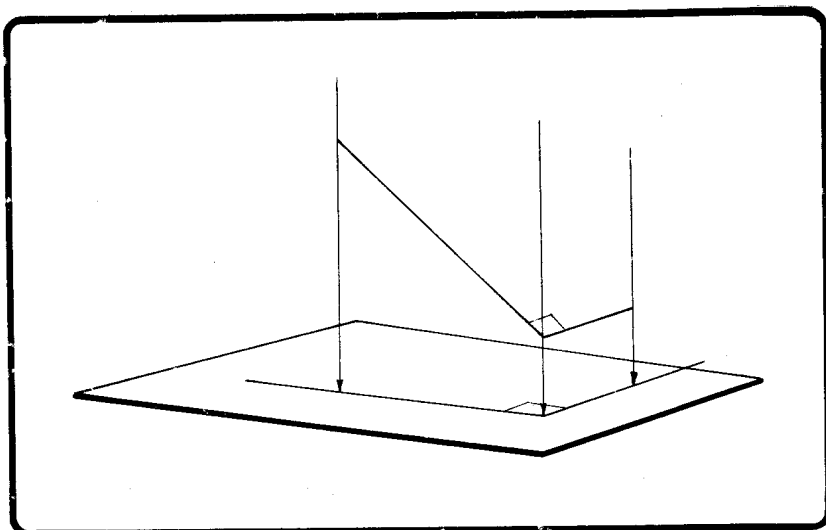
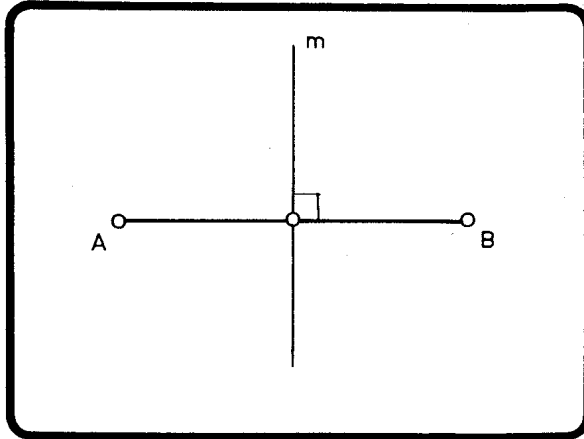
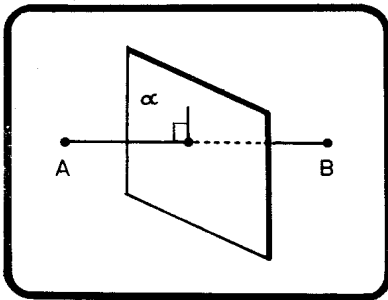
a) *Projeção ortogonal de um ponto*

A é a projeção ortogonal de *P*

b) *Distância de um ponto a uma reta ou a um plano* é a distância do ponto à sua projeção ortogonal.

c) *Projeção de uma reta sobre um plano* é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da reta sobre o plano.

d) *Projeção de um segmento sobre uma reta*

Seja $\overline{B'C'}$ a projeção de $\overline{BC}$ sobre a reta γ.

e) *Projeção de um segmento sobre um plano* é a projeção do segmento sobre a reta projeção de sua reta suporte sobre o plano.

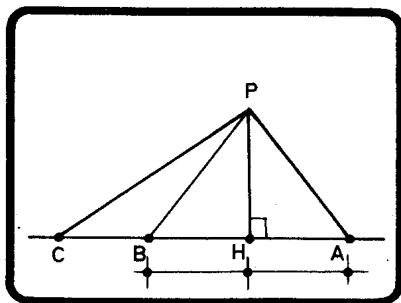
f) *Ângulo de uma reta com um plano* é o ângulo que a reta forma com sua projeção sobre o plano.

g) *Projeção do ângulo reto*

Um ângulo reto se projeta como um ângulo reto sobre um plano se, e somente se, um de seus lados for paralelo ao plano (ou estiver nele contido) e o outro não for perpendicular ao mesmo plano.

6.2 — a) *Mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que contém seu ponto médio.

b) *Plano mediador* de um segmento é o plano perpendicular ao segmento, que contém o seu ponto médio.

O plano mediador de um segmento contém todas as mediatrizes desse segmento.

6.3 — PERPENDICULARES E OBLÍQUAS

Se de um ponto exterior a uma reta (ou a um plano) traçarmos a perpendicular e várias oblíquas:

1 — o segmento da perpendicular é menor que o de qualquer oblíqua.

2 — os segmentos de oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular são congruentes (e reciprocamente).

3 — Se duas oblíquas se afastam desigualmente do pé da perpendicular, o maior segmento é o da oblíqua que mais se afasta (e reciprocamente).

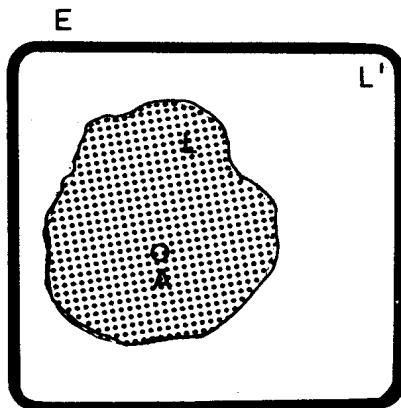
6.4 — LUGAR GEOMÉTRICO

Lugar geométrico é o conjunto de *todos* os pontos que satisfazem a determinada propriedade (ou propriedades).

Assim, se L é o lugar geométrico dos pontos que possuem uma propriedade p, teremos:

1) $\forall A \in L$, A possui a propriedade p.

2) $\nexists A \in L' \mid$ A possui a propriedade p.*

* $L' = \complement_E L$.

Em qualquer demonstração teremos, portanto, que dividi-la em duas partes. Numa mostraremos que todos os pontos do conjunto possuem a mesma propriedade e na outra mostraremos que essa propriedade é exclusiva desses pontos, ou seja, nenhum outro ponto, fora do conjunto, poderá possuir a referida propriedade.

6.5 — MEDIATRIZ COMO LG

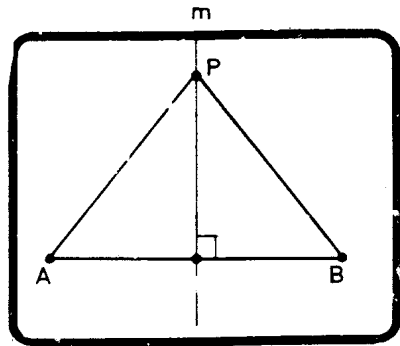
A mediatriz de um segmento é o LG dos pontos que eqüidistam dos extremos do segmento.

Seja m a mediatriz de $\overline{AB}$.

1.ª parte

H — P ε m

T — PA = PB

D —

Realmente, como $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular, PA = PB. (1)

2.ª parte

H — P ∉ m

T = PA ≠ PB

D —

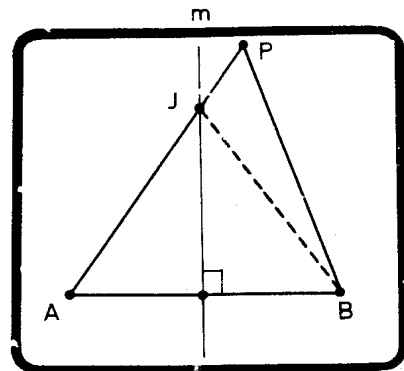
PB < PJ + JB

mas JB = JA, pois J ε m. Logo,

PB < PJ + JA ou

PB < PA, o que é suficiente para escrever

PA ≠ PB. (2)

Por (1) e (2), C. Q. D.

6.6 — BISSETRIZ COMO LG

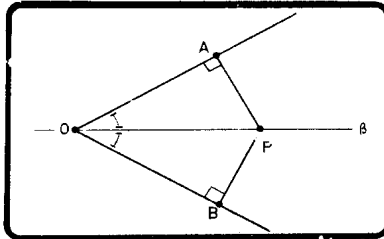
A bissetriz de um ângulo é o LG dos pontos que eqüidistam dos lados do ângulo.

Seja β a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.

1.ª parte

H — $P \; \varepsilon \; \beta$

T — $PA \neq PB$

D —

Realmente, da congruência dos triângulos POA e POB escreve-se imediatamente:

$$PA = PB \quad (1)$$

2.ª parte

H — $P \notin \beta$

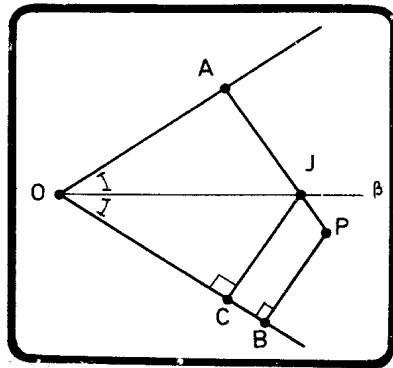
T — $PA \neq PB$

D —

$PB < PC < PJ + JC$

mas $JC = JA$, pois $J \; \varepsilon \; \beta$. Logo,

$PB < PJ + JA$ ou

$PB < PA$, o que basta para escrever

$$PA \neq PB \quad (2)$$

Por (1) e (2), C. Q. D.

CAPÍTULO 7

CÍRCULO

7.1 — DEFINIÇÕES

Sejam R um segmento dado e O e P pontos fixo e variável, respectivamente. Definimos:

CÍRCULO $= \{P \mid OP = R\}$

DISCO ABERTO $= \{P \mid OP < R\}$

DISCO FECHADO $= \{P \mid OP \leqslant R\}$

O ponto O é o *centro* e R é o *raio*.

7.2 — ELEMENTOS

raio — R

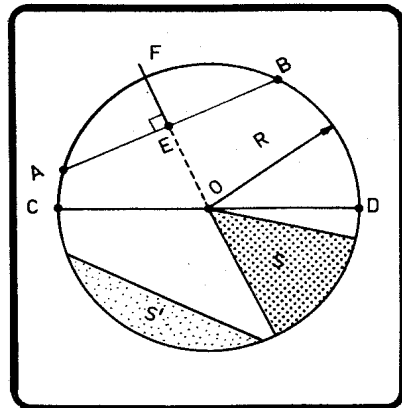
arco — $\overset{\frown}{AB}$*

corda — $\overline{AB}$

flecha — $\overline{EF}$

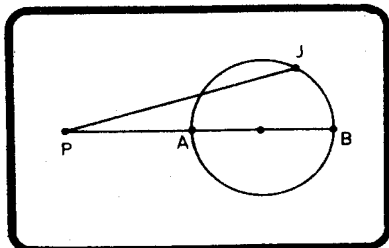
diâmetro — $\overline{CD}$

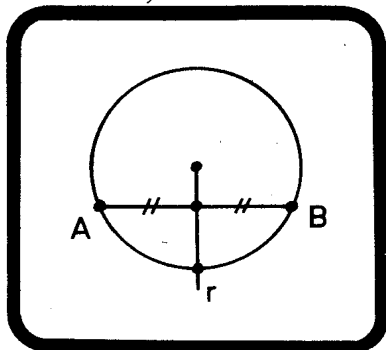
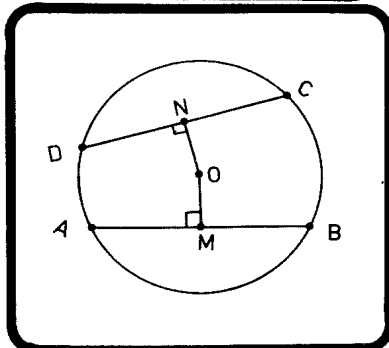
setor circular — S

segmento circular — S′

* A notação $\overset{\frown}{AB}$ refere-se ao menor dos arcos.

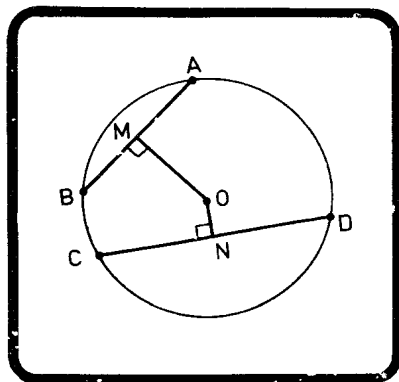
7.3 — OBSERVAÇÕES

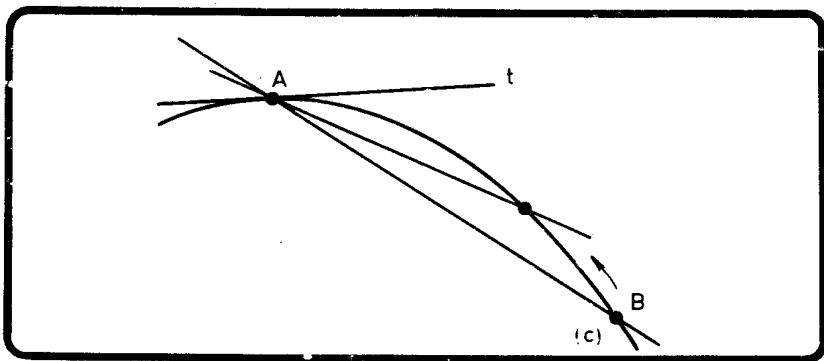
a) O diâmetro é a maior corda de um círculo.

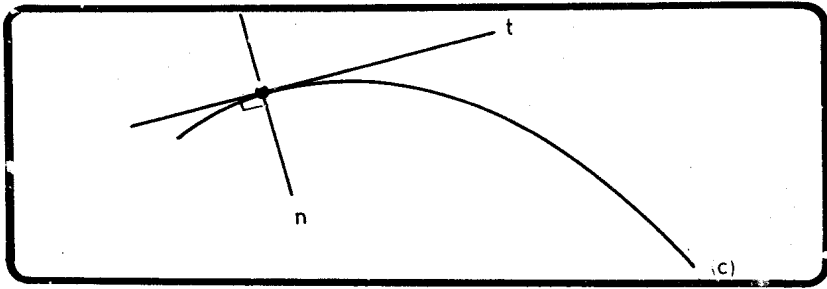
b) As distâncias máxima e mínima de um ponto a um círculo estão sobre a reta que passa por esse ponto e contém o centro do círculo.

$$\left.\begin{array}{r} J \neq A \\ J \neq B \\ \forall \; J \in \text{círculo} \end{array}\right\} \Longrightarrow PA < PJ < PB.$$

c) Todo raio perpendicular a uma corda divide esta ao meio e reciprocamente.

d) Duas cordas iguais possuem mesma distância ao centro do círculo e reciprocamente.

$$AB = CD \Longleftrightarrow OM = ON$$

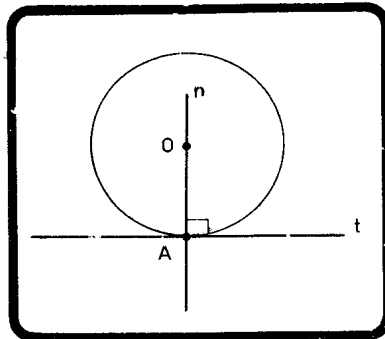
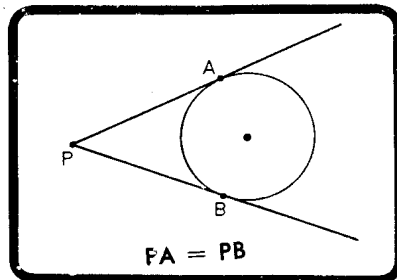
e) Se duas cordas se afastam desigualmente do centro do círculo, a menor é a que mais se afasta e reciprocamente.

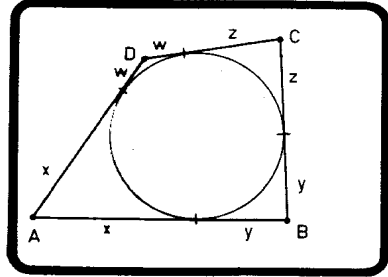
$AB < CD \iff OM > ON.$

7.4 — TANGENTE

Tangente a uma curva plana em um ponto A é a reta posição limite da secante AB quando o ponto B tende ao ponto A.

7.5 — NORMAL PRINCIPAL

Normal a uma curva plana em um ponto A é a reta perpendicular à tangente ao ponto de tangência.

7.6 — TANGENTE E NORMAL A UM CÍRCULO

a) A tangente a um círculo é a reta que só possui um ponto em comum com o círculo.

b) A normal a um círculo passa sempre pelo centro.

c) Os segmentos das tangentes traçadas de um ponto exterior a um círculo são congruentes.

7.7 — QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL* (TEOREMA DE PITOT)

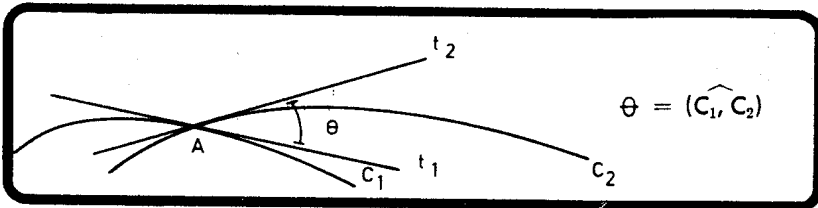
Um quadrilátero é circunscritível a um círculo se, e somente se, as somas dos lados opostos forem iguais.

Demonstração

Pela observação c) temos:

$$\left.\begin{array}{l} + \left(\begin{array}{l} AB = x + y \\ CD = w + z \end{array} \right. \\ + \left(\begin{array}{l} AD = x + w \\ BC = y + z \end{array} \right. \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{AB + CD = AD + BC}$$

7.8 — ÂNGULO DE DUAS CURVAS SECANTES EM UM PONTO

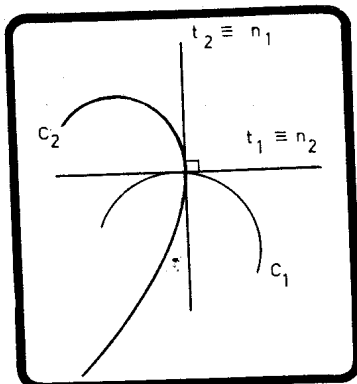
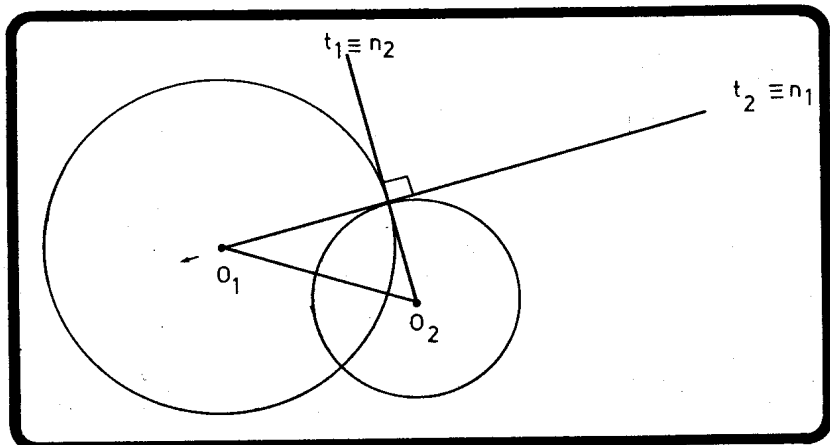
Se duas curvas são concorrentes em A, o ângulo entre as duas curvas é o ângulo das tangentes traçadas por A.

---

* Um polígono é CIRCUNSCRITÍVEL a um círculo se, e só se, existe um círculo que é tangente a todos os seus lados.

Um polígono é INSCRITÍVEL em um círculo se, e só se, existe um círculo que contém todos os seus vértices.

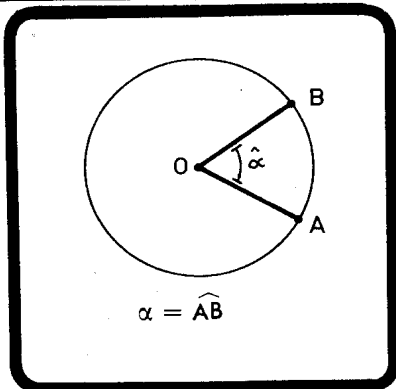
7.9 — CURVAS ORTOGONAIS

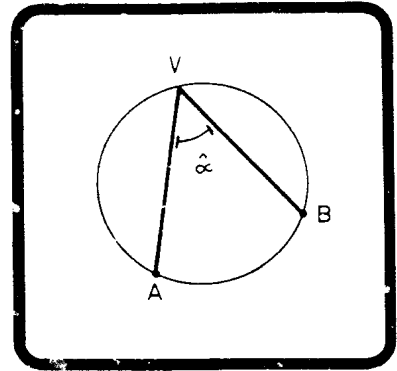
São curvas que possuem tangentes perpendiculares no ponto do concurso.

Em curvas ortogonais, a tangente a uma é normal à outra e vice-versa.

7.10 — CÍRCULOS ORTOGONAIS

7.11 — ARCOS E ÂNGULOS

1) ÂNGULO CENTRAL

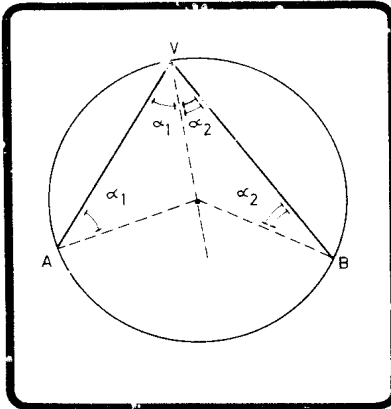
É o ângulo cujo vértice é o centro do círculo.

A medida de um arco de círculo é igual à medida do ângulo central correspondente.

2) ÂNGULO INSCRITO

É o ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e cujos lados são secantes.
A medida do ângulo inscrito é igual à medida da metade do arco determinado por seus lados.

$2\hat{\alpha}_1 + 2\hat{\alpha}_2 = \widehat{AB}$ (v. ângulos externos).

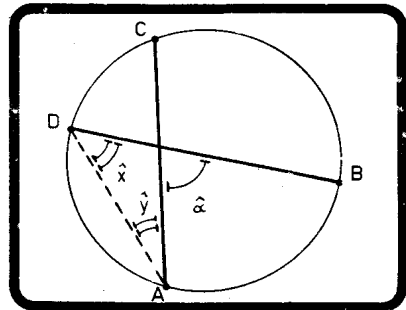
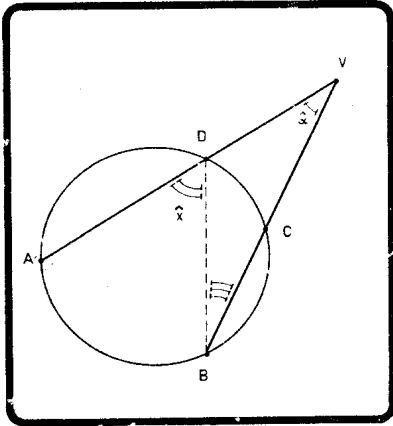
$$2(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) = \widehat{AB}$$

$$2\hat{\alpha} = \widehat{AB}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}}$$

3) ÂNGULO DE VÉRTICE INTERIOR

A medida do ângulo de vértice interior é igual à semi-soma dos arcos determinados pelos seus lados e prolongamentos.

$$\hat{\alpha} = \hat{x} + \hat{y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x} = \dfrac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{y} = \dfrac{\widehat{CD}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}}$$

4) ÂNGULO DE VÉRTICE EXTERIOR

A medida do ângulo de vértice exterior cujos lados são secantes ao círculo é a semidiferença dos arcos determinados por seus lados.

$$\hat{\alpha} = \hat{x} - \hat{y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \\ \hat{y} = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\hat{\alpha} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}}$$

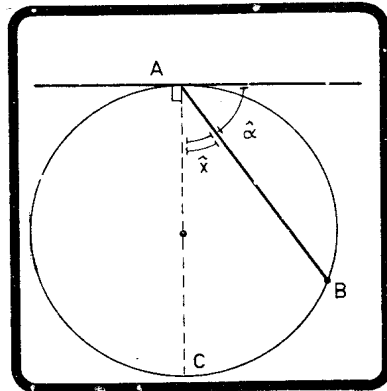
5) ÂNGULO DE SEGMENTO

É o ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e cujos lados são uma tangente e uma secante ao círculo

A medida do ângulo de segmento é a metade da medida do arco interior ao setor angular.

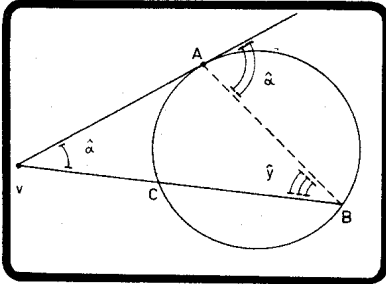
$$\hat{\alpha} = 90° - \hat{x}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

6) OBSERVAÇÃO

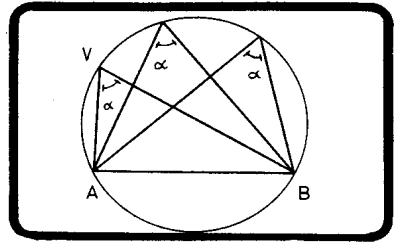
Um ou ambos os lados de um ângulo de vértice exterior podem ser tangentes ao círculo. A medida do ângulo

continua a ser a semidiferença dos arcos determinados pelos lados.

$$\hat{\alpha} = \hat{x} - \hat{y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \quad \text{(segmento)} \\ \\ \hat{y} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} \quad \text{(inscrito)} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\alpha} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}}{2}}$$

7.12 — ARCO CAPAZ

a) Quando considerarmos uma corda $\overline{AB}$ de um círculo, verificamos que de qualquer ponto de um dos arcos podemos ver o segmento $\overline{AB}$ sob mesmo ângulo α.

De fato, para qualquer posição do vértice sobre um dos arcos,

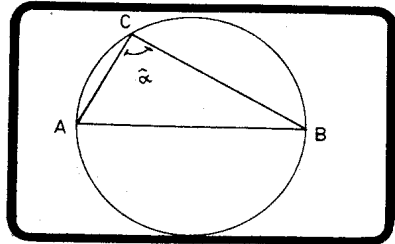
$\hat{\alpha} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\alpha}$ sendo constante, portanto. O arco $\overset{\frown}{AVB}$ é chamado

arco capaz do ângulo α sobre o segmento $\overline{AB}$.

b) OBSERVAÇÃO

Qualquer triângulo inscrito em um círculo tendo um dos lados como diâmetro desse círculo é retângulo.

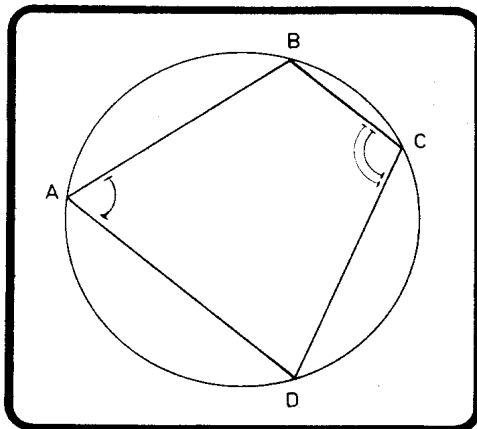
$$\hat{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\alpha} = \frac{180°}{\alpha}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\alpha} = 90°}$$

7.13 — QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos forem suplementares.

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$$

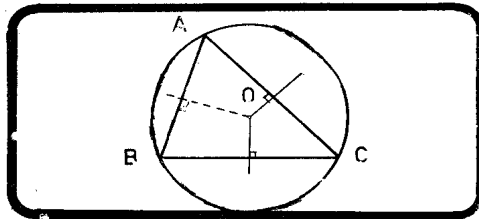
$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{DAB}}{2}$$

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{DAB}}{2}$$

$$\boxed{\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ}$$

CAPÍTULO 8

PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

8.1 — CIRCUNCENTRO

As mediatrizes dos lados de um triângulo cortam-se em um ponto denominado circuncentro, que é o centro do círculo que passa pelos três vértices.

Consideremos as mediatrizes de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e seu ponto de concurso O. Como O pertence à mediatriz de $\overline{AC}$, temos:

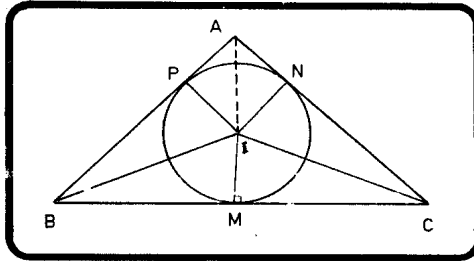
$$\overline{OA} = \overline{OC}$$

Como O pertence à mediatriz de BC, temos: $\overline{OB} = \overline{OC}$.

Conseqüentemente, como $\overline{OA} = \overline{OB}$, concluímos que O pertence à mediatriz de $\overline{AB}$, sendo O o centro do círculo circunscrito.

8.2 — INCENTRO

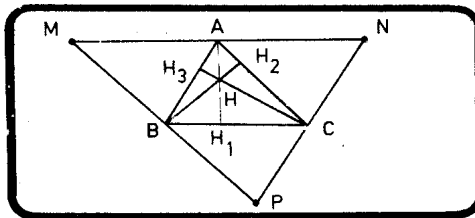
As bissetrizes internas de um triângulo cortam-se em um ponto denominado incentro, que é o centro do círculo tangente aos três lados do triângulo.

Pelo mesmo raciocínio anterior, consideremos o ponto de concurso das bissetrizes de $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

Verificamos que:

$$\begin{aligned} & \overline{IP} = \overline{IM} \\ & \overline{IM} = \overline{IN} \qquad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad & \overline{IP} = \overline{IN} \end{aligned}$$

Logo, I pertence à bissetriz de $\widehat{A}$, sendo o centro do círculo procurado.

8.3 — ORTOCENTRO

As três alturas de um triângulo concorrem em um único ponto denominado ortocentro.

Tracemos pelos vértices do triângulo ABC paralelas aos lados opostos. ABCN e ACBM são paralelogramos. Logo,

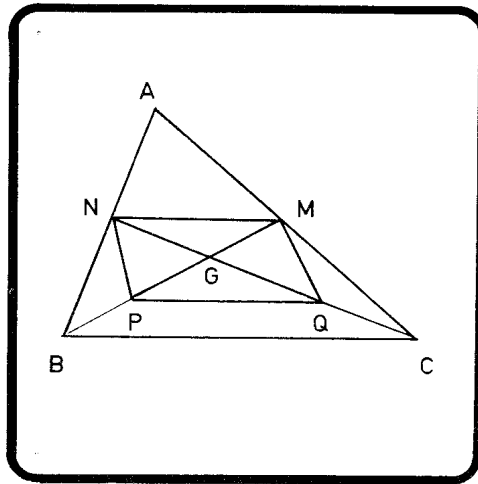
$$\begin{aligned} & \overline{BC} = \overline{MA} \qquad \text{e} \\ & \overline{BC} = \overline{AN} \quad \Longrightarrow \quad \text{A é médio de } \overline{MN}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que B e C são também médios dos lados $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$. Assim, as três alturas concorrem em um ponto, pois são mediatrizes dos lados do triângulo MNP.

OBSERVAÇÃO

O triângulo de vértices H_1, H_2 e H_3 é chamado triângulo órtico do triângulo ABC.

8.4 — BARICENTRO

As três medianas de um triângulo cortam-se em um único ponto que dista do comprimento de cada mediana 2/3 do vértice e 1/3 do ponto médio do lado oposto.

Consideremos as medianas $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ e seu ponto de concurso G. Consideremos, também, os pontos P e Q, médios de $\overline{BG}$ e $\overline{CG}$.

No triângulo ABC ... $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $MN = \dfrac{BC}{2}$

No triângulo GBC ... $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ e $PQ = \dfrac{BC}{2}$

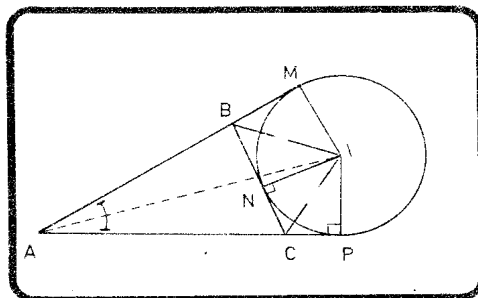
Logo, MNPQ é um paralelogramo e, como as diagonais, cortam-se ao meio PG = GM. Mas, como P é médio de BG, temos:

$$GB = 2/3 \text{ de } BM \text{ e}$$

$$BP = PG = GM \quad \therefore \quad GM = 1/3 \text{ de } BM.$$

8.5 — EX-INCENTROS

As bissetrizes externas de dois ângulos de um triângulo e a interna do terceiro ângulo encontram-se em um ponto chamado ex-incentro, que é o centro do círculo tangente a um dos lados e aos prolongamentos dos outros dois.

Existem, portanto, três círculos ex-inscritos.

Consideremos as bissetrizes externas dos ângulos B e C e seu ponto de concurso I. Temos que:

$$\overline{IM} = \overline{IN} \text{ e}$$

$$\overline{IN} = \overline{IP}$$

Conseqüentemente, como $\overline{IM} = \overline{IP}$, o ponto I pertence à bissetriz de $\widehat{A}$.

8.6 — OBSERVAÇÕES

a) O simétrico do ortocentro em relação a um dos lados está sobre o círculo circunscrito ao triângulo.

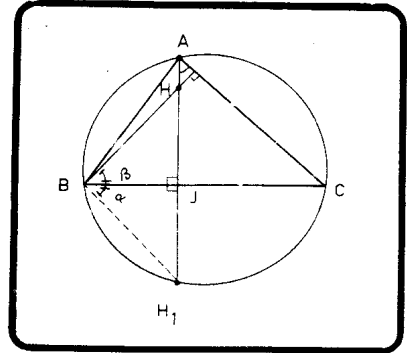
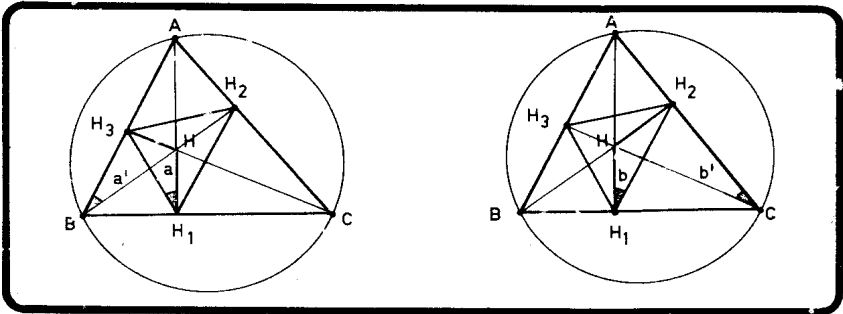
$$\widehat{\alpha} = \widehat{\gamma} = \frac{\widehat{H_1C}}{2}$$

$\widehat{\beta} = \widehat{\gamma}$ (lados respec. ⊥s).

$$\Downarrow$$

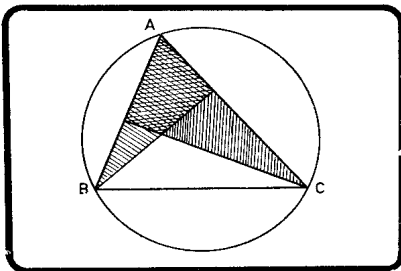
$$\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$$

Da congruência dos triângulos BJH e BJH_1 temos:

$$\boxed{HJ = JH_1}$$

b) O ortocentro de um triângulo é o incentro de seu triângulo órtico.

$BH_1\,H\,H_3 \rightarrow$ inscritível

$\widehat{a} = \widehat{a}'$

$CH_1\,H\,H_2 \rightarrow$ inscritível

$\widehat{b} = \widehat{b}'$

$$\widehat{a}' = \widehat{b}'$$

pois possuem mesmo complemento $\widehat{A}$. Logo,

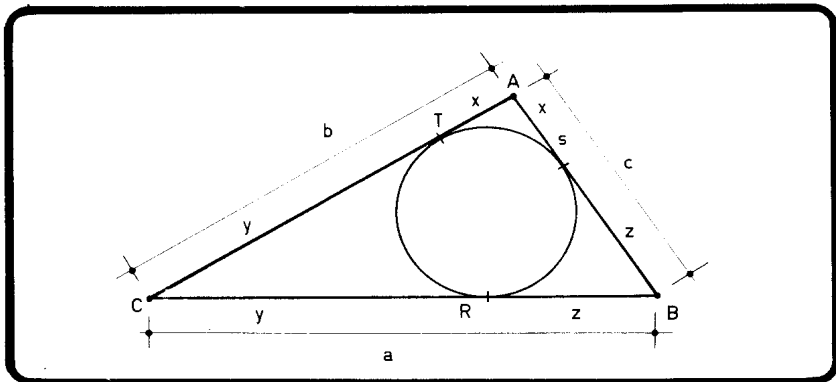
$$\widehat{a} = \widehat{b}$$

Assim, as alturas do Δ ABC são bissetrizes internas do $\Delta H_1H_2H_3$ e o ponto H é, portanto, seu incentro.

c) Os vértices de um triângulo são os ex-incentros do triângulo órtico.
De fato, se $\overline{H_1H}$, $\overline{H_2H}$ e $\overline{H_3H}$ são bissetrizes internas do $\Delta\ H_1H_2H_3$, as retas $\overleftrightarrow{BH_1C}$, $\overleftrightarrow{CH_2A}$ e $\overleftrightarrow{AH_3B}$ são bissetrizes externas do mesmo triângulo, pois são perpendiculares às bissetrizes internas. Então, A, B e C são ex-incentros do $\Delta\ H_1H_2H_3$.

8.7 — PRINCIPAIS SEGMENTOS DO TRIÂNGULO

8.7.1 — Sejam:

a, b, c → lados
2p → perímetro
r → raio do círculo inscrito
R → raio de círculo circunscrito
r_a, r_b, r_c → raio dos círculos ex-inscritos.

$$2x + 2y + 2z = 2p$$
$$x + y + z = p$$
$$x = p - (y + z) \Longrightarrow x = p - a$$

$$\left.\begin{array}{l} AT = AS = p - a \\ BR = BS = p - b \\ CR = CT = p - c \end{array}\right\} I$$

Como CM = CD, BM = BD′ e AD = AD′, temos:

$$AC + CB + AB = 2p$$

$$AC + CM + BM + AB = 2p$$

$$AC + CD + BD' + AB = 2p$$

$$AD + AD' = 2p \implies$$

$$AD = AD' = p$$

Temos então

$$\left.\begin{array}{l} AD = AD' = p \\ BE = BE' = p \\ CF = CF' = p. \end{array}\right\} \quad II$$

Vemos também que:

$$\left.\begin{array}{l} CE = CP = BF = BN = p-a \\ CD = CM = AN = AF' = p-b \\ BM = BD' = AP = AE' = p-c \end{array}\right\} \quad III$$

$MR = CR - CM = p - c - (p - b) = b - c$ Então,

$$\left.\begin{array}{l} MR = b - c \\ PT = a - c \\ SN = a - b \end{array}\right\} \quad IV$$

$EF = EB + BF = p + p - a = 2p - a = b + c$ Então,

$$\left.\begin{array}{l} EF = b + c \\ DF' = a + c \\ P'E' = a + b \end{array}\right\} \quad V$$

$EM = EC + CM = p - a + p - b = 2p - (a + b) = c.$ Assim,

$$\begin{array}{l} EM = DP = c \\ MF = ND' = b \\ NE' = PF' = a \end{array}$$

e também

$$\begin{array}{l} RE = b \\ RF = c \\ SD' = a \\ SE' = b \\ TF' = c \\ TD = a \end{array}$$

8.7.2 — Calcularemos, agora, os segmentos $A'K$, $B'K_1$ e $C'K_2$.

Sabemos que $CM = BR$ (8.7.1, I e III).

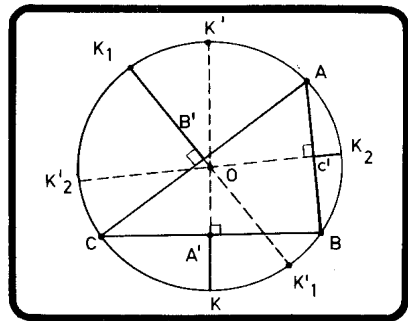
e que $EC = BF$ (8.7.1, III).

Assim, A' é médio de $\overline{BC}$, de $\overline{MR}$ e de $\overline{EF}$.

Imediatamente, $A'K'$ é base média de EFI_cI_b e:

$$A'K' = \frac{rb + rc}{2}$$

$$KL = \frac{1}{2}\ JIa = \frac{1}{2}\ (JM + MIa) = \frac{1}{2}(r + ra).$$

$$A'K = KL - LA' = \frac{1}{2}\ (r + ra) - r = \frac{1}{2}(ra - r).$$

Temos, então, os resultados:

$$\left.\begin{aligned} A'K &= \frac{1}{2}(r_a - r) \\ B'K_1 &= \frac{1}{2}(r_b - r) \\ C'K_2 &= \frac{1}{2}(r_c - r) \end{aligned}\right\} \quad I$$

$$\left.\begin{aligned} A'K' &= \frac{1}{2}(r_b + r_c) \\ B'K'_1 &= \frac{1}{2}(r_a + r_c) \\ C'K'_2 &= \frac{1}{2}(r_a + r_b) \end{aligned}\right\} \quad II$$

8.7.3 — Relação dos Cinco Raios

Como $KK' = 2\ R$, vem:

$KK' = A'K' + A'K$

$$2\ R = \frac{1}{2}(r_b + r_c) + \frac{1}{2}(r_a - r) =$$

$$\boxed{4\ R = r_a + r_b + r_c - r}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIOS

1 — Um dos princípios lógicos diz que, se dois juízos estão em oposição contraditória, então ....

2 — Certo ou errado?

Se r é uma reta e α um plano, então ou r pertence a α ou é paralela a α.

3 — A Geometria parte de conceitos .... definidos e chamados conceitos .... e de proposições não demonstráveis denominadas ....

4 — Chama-se .... a toda proposição que seja conseqüência de outras anteriores.

5 — Certo ou errado?

Axioma é uma verdade evidente por si mesma.

6 — Definido um sistema de axiomas, os teoremas daí decorrentes devem ser obtidos por ....(intuição, raciocínio lógico).

7 — O conjunto de todos os pontos chama-se ....

8 — Se um plano e uma reta possuem um ponto comum, então .... ou ....

9 — Se dois pontos de um plano pertencem a um outro plano, então sua interseção ....
ou os dois planos ....

10 — Duas retas podem ser:

a) ....

b) ....

c) ....

d) ....

11 — Um plano fica determinado por

a) ....

b) ....

c) ....

d) ....

12 — Certo ou errado?

É possível definir cada termo geométrico usando termos geométricos mais simples?

13 — Certo ou errado?

Qualquer afirmação que parece verdadeira deve-se tornar um axioma.

14 — Certo ou errado?

Três pontos determinam um plano.

15 — Um conjunto é colinear quando existe ....
.... que passa por todos os pontos do conjunto.

16 — Um conjunto é coplanar quando existe ....
.... que passa por todos os pontos do conjunto.

17 — A, B e C pertencem a um plano α e também a um plano β. Então α e β são .... ou ....
caso A, B e C sejam ....

18 — Certo ou errado?

Se duas retas têm um ponto comum, não são paralelas.

19 — Certo ou errado?

Duas retas não paralelas são concorrentes.

20 — Quando dizemos que:

"Um círculo é algo que é redondo."

O que há de errado nessa definição?

21 — Um ponto de uma reta determina duas..

.............................., sendo esse ponto chamado..............................

.... ou ....

22 — Uma reta de um plano determina dois..

.... sendo essa reta chamada

.... ou ....

23 — Dois pontos de uma reta determina um..

.... de reta.

24 — Certo ou errado?

Se A e B são pontos de um plano situados em semiplanos *opostos* determinados por uma reta r, então r e a reta AB são necessariamente concorrentes.

25 — Certo ou errado?

Se A e B são pontos de um plano situados em um mesmo semiplano determinado por uma reta r. Então:

A) r e o segmento $\overline{AB}$ não possuem ponto comum.

B) r e a reta $\overline{AB}$ possuem necessariamente um ponto comum.

26 — Certo ou errado?

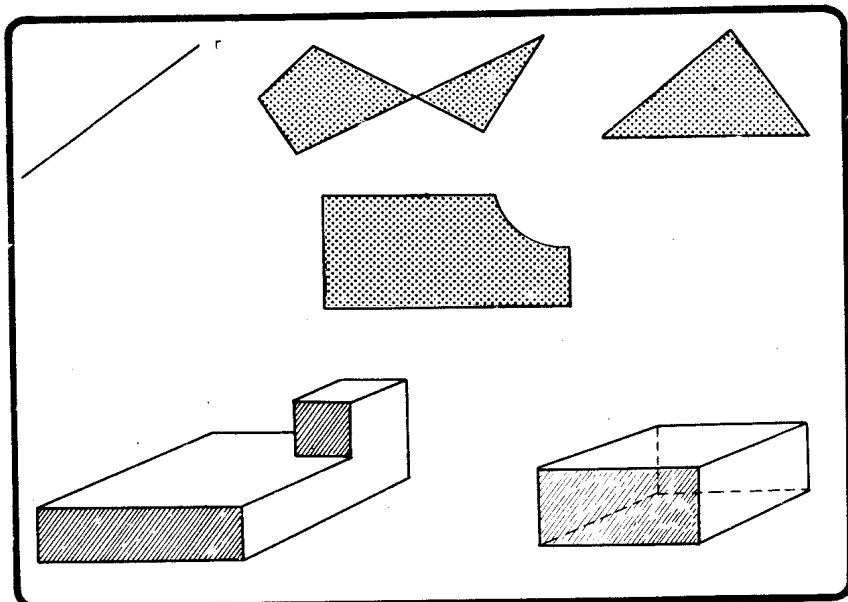
Semi-retas, semiplanos e semi-espaços são conjuntos convexos.

27 — Sejam A e B dois pontos. O conjunto das posições ocupadas por um ponto C, colinear com A e B, tal que B esteja sempre entre

A e C, é ....

cuja fronteira é ....

28 – Das figuras abaixo .... são convexas.

r

29 – Setor angular convexo é a ....

de dois .... de fronteiras concorrentes.

30 – Ângulo é a figura formada por duas ....

.... de mesma ....

31 – O ângulo entre duas retas é ....

32 – Duas retas são ...., ...
quando são reversas e formam ângulo reto.

33 – Se duas figuras são congruentes, podemos levá-las a ....

.... em todos os seus pontos

mediante um ....

34 — Ângulo formado por duas reversas é...

....

....

35 — Bissetriz de um ângulo é...

....

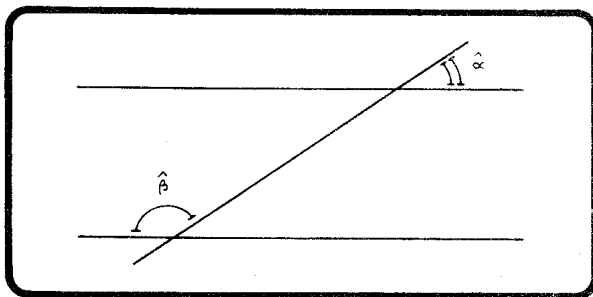
36 — Duas retas são...
quando são concorrentes e formam quatro ângulos congruentes.

37 — As bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares formam um ângulo igual a...

38 — As bissetrizes de dois ângulos adjacentes complementares formam um ângulo igual a...

39 — Dois ângulos opostos pelo vértice são..
.... e suas bissetrizes
são ....

40 — Se duas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos .... são iguais, os correspondentes são...e os colaterais são...

41 — Os ângulos da figura possuem a relação:...

42 – Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são..............
.... se ....,
ou são ....
.... se ....

43 – Dois ângulos agudos de lados respectivamente perpendiculares
são...

44 – Se uma reta é perpendicular a um plano ela é........................
.... ou ....a qualquer
reta do plano.

45 – Três retas em um plano separam este plano em...........................
regiões. Destas..........................são convexas.

46 – Por um ponto exterior a um plano passa(m)........................
plano(s) paralelo(s) ao plano dado.

47 – Por um ponto exterior a um plano passa(m).....................plano(s)
perpendicular(es) ao plano dado.

48 – Por um ponto exterior a uma reta passa(m).....................plano(s)
paralelo(s) à reta.

49 – Por um ponto exterior a uma reta passa(m)...............................
.... plano(s) perpendicular(es) à reta.

50 – As retas ortogonais a uma reta r que passam pelo ponto A,
estão contidas.. que passa
por A e é...a r.

51 – Diedro é a figura formada por..

52 – Reta de maior declive de um plano β em relação a um plano α é
....

53 – Retilíneo de um diedro é o ângulo obtido pela interseção do
diedro com um plano..

54 — Bissetor de um diedro é o..

que divide o diedro em..

55 — Dois diedros são suplementares quando..

....

56 — Dois planos são perpendiculares quando formam..

....

57 — Faça a correspondência

1 — ângulos	( ) bissetor
2 — vértice	(1) diedros
3 — lados	( ) aresta
4 — bissetriz	( ) faces

58 — Se uma reta r é perpendicular a um plano α, qualquer plano que contenha r é ....a α.

59 — Se a reta r é oblíqua ao plano α, existe(m).. plano(s) contendo r e em perpendicular a α.

Seja d(A, B) a distância entre os pontos A e B

60 — Certo ou errado?

d(A, B) = d(B, A)

61 — $\overline{AB} \rightarrow d(A, B)$ Tal que

a) d(A, A) = ...

b) d(A, B)..............................0 (maior, menor, igual).

c) Se C é colinear com A e B e se C está entre A e B, então d(A, C).................. d(A, B).

62 — A unidade angular no sistema sexagesimal é o.............................., que é igual a..................minutos ou..................segundos.

63 — A unidade angular no sistema decimal é o.............................., que é igual a 10.............................., a.............................. centígrados e a..

64 – Uma linha poligonal fechada é um..
e o número de lados é o seu..

65 – A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é o seu
....

66 – Diagonal de um polígono é..

67 – Se um polígono possui o mesmo número de lados e diagonais ele é um..

68 – Por um vértice de um dodecágono podemos traçar........................
....diagonais.

69 – Uma reta corta um polígono convexo em um máximo de..............
....pontos.

70 – A interseção de uma reta com uma região poligonal convexa é sempre..

71 – Um pentadecágono possui...diagonais.

72 – Um polígono é eqüilátero quando ....

73 – Um polígono é eqüiângulo quando ....

74 – Um polígono é regular quando..

75 – Certo ou errado?
Todo polígono eqüilátero é regular.

76 – Em um polígono convexo, os ângulos interno e externo de mesmo vértice são ....

77 – Certo ou errado?
Qualquer propriedade verificada em um triângulo isósceles é verificada, também, em um triângulo eqüilátero.

78 – Quanto aos ângulos os triângulos podem ser:

...., ...

ou..

79 – O maior lado de um triângulo...
chama-se hipotenusa, e os dois menores,..

....

80 – Se dois lados de um triângulo medem 7 cm e 3 cm, o terceiro lado é menor que..e maior que.....................

81 – Altura de um triângulo é uma reta que passa por um vértice e...ao lado oposto.

82 – ....de um triângulo é a reta que passa por um vértice e pelo ponto médio do lado oposto.

83 – Se os lados de um triângulo isósceles são números inteiros e se o seu perímetro é igual a 8, seus lados medem.................................

.... e ....

84 – Os casos de congruência de triângulos quaisquer são:

1) ....

2) ....

3) ....

85 – Os casos de congruência de triângulos retângulos são:

1) ....

2) ....

86 – A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a.....................
..............................e a soma dos externos igual a.......................

87 – Em um triângulo, cada ângulo externo é igual a...............................

....

88 — A soma dos ângulos internos de um eneágono convexo é igual a.. .

89 — Certo ou errado?

Se um polígono tem 9 diagonais, então a soma de seus ângulos internos é igual a 720°.

90 — Em um polígono convexo de gênero n, a soma dos ângulos internos vale..................................e a dos externos..............................

91 — Certo ou errado?

Em um polígono qualquer, a soma dos ângulos internos depende do gênero, enquanto que a dos externos é sempre constante.

92 — Certo ou errado?

Todo trapézio é um quadrilátero assim como todo quadrilátero é também um trapézio.

93 — Certo ou errado?

Se qualquer paralelogramo possui certa propriedade *P*, então *P* é válida em qualquer retângulo.

Considere as propriedades:

A) Possuir lados opostos congruentes
B) Possuir ângulos opostos congruentes
C) Possuir ângulos adjacentes suplementares
D) Possuir diagonais cortando-se ao meio
E) Possuir diagonais congruentes
F) Possuir diagonais perpendiculares.

94 — Um paralelogramo possui as propriedades.............................. .

95 — Um retângulo possui as propriedades..

96 — Um losango possui as propriedades..

97 — Um quadrado possui as propriedades..

98 — Em um triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa
....

99 — Se um triângulo retângulo possui um ângulo de 30°, o cateto oposto a esse ângulo ....

100 — O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo, ...

101 — A base média de um trapézio mede a .... das bases.

102 — A mediana de Euler de um trapézio mede a .... das bases.

103 — Projeção de um ponto sobre uma reta é o pé ....
.... traçada do ponto à reta.

104 — Distância de um ponto a um plano é a distância do ponto ....
....

105 — Certo ou errado?

O comprimento da projeção de um segmento sobre uma reta é sempre menor que o comprimento do segmento.

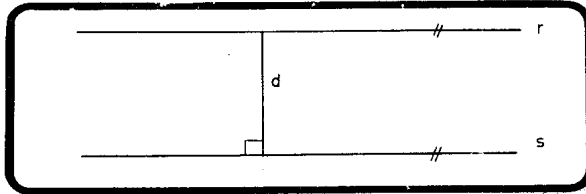
106 — Um ângulo reto projeta-se sobre um plano como um ângulo reto, desde que um de seus lados seja ....
e o outro .... ao mesmo plano.

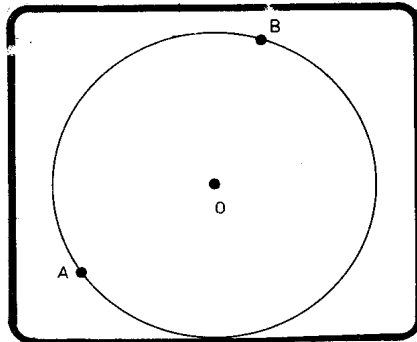
107 — Mediatriz de um segmento é a reta .... que passa pelo ....

108 — No espaço todas as mediatrizes de um segmento estão contidas no ....

109 — Lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos que ....
....

110 — Certo ou errado?

A reta r da figura é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância *d* da reta *s*.

111 — Certo ou errado?

Todos os pontos do arco $\overline{AB}$ possuem mesma distância ao ponto O.

112 — Certo ou errado?

Os pontos do arco $\overset{\frown}{AB}$ constituem um lugar geométrico.

113 — O lugar geométrico dos centros dos círculos de raio R, que passam pelo ponto A é..

114 — O lugar geométrico dos centros dos círculos que passam por dois pontos fixos A e B é..

115 — Círculo de centro O e raio R é o conjunto dos pontos *P* do plano que contém O, tal que..

....

Seja d a distância entre os centros de dois círculos de raios R e r.

116 – Os círculos são exteriores se..

117 – Os círculos são tangentes exteriormente se..

118 – Os círculos são secantes se..

119 – Os círculos são tangentes interiormente se..

120 – Os círculos são interiores se...

121 – Os círculos são concêntricos se..

122 – Se em um mesmo círculo a corda $\overline{AB}$ é maior que $\overline{CD}$, a corda mais próxima do centro é.................................

123 – A condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja circunscritível a um círculo é..

124 – Se dois crcíulos são ortogonais, as retas que unem os centros a um dos pontos de concurso são...
....

125 – Ângulo central é...
....e sua medida é...
....

126 – Ângulo inscrito é...
..................................e sua medida é...
....

127 – Ângulo de segmento é...
....e sua medida é..............................
....

128 – O ângulo de vértice interior tem por medida...
....

129 – O ângulo de vértice exterior tem por medida...
....

130 — O lugar geométrico dos pontos médios das cordas de mesmo comprimento de um círculo é..

131 — A condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo seja inscritível em um círculo é..

....

132 — Circuncentro de um triângulo é o ponto de concurso das..................

....................dos lados e é o centro do círculo...............................

133 — Incentro de um triângulo é o ponto de concurso das........................

....e é o centro do círculo....................

134 — Ortocentro de um triângulo é o ponto de concurso das...........

....do triângulo.

135 — Os pés das alturas de um triângulo são vértices de um triângulo chamado ....

....

136 — Baricentro de um triângulo é o ponto de concurso das................

.... e está de tal forma situado, que divide cada uma delas em dois segmentos, sendo o maior o

....do menor.

137 — Em um triângulo ABC, as bissetrizes externas que partem de B e C cortam-se em um ponto chamado...

138 — Este ponto é o centro de um círculo que é tangente ao lado ....e aos prolongamentos dos lados

.... e ....

139 – Os simétricos do ortocentro em relação aos lados do triângulo estão sobre o ....

140 – Se X, Y e Z são os pés das alturas de um triângulo ABC, o incentro do triângulo XYZ é o ....
do triângulo ABC, e os pontos A, B e C são os ....
.... do triângulo XYZ.

PROBLEMAS

1) Escrevendo $100^\circ 47' 57''$ em segundos, encontraremos:

   A) $36775''$
   B) $36757''$
   C) $362757''$
   D) $752376''$
   E) N. R. A.

2) Efetuando $20^\circ 45' 16'' + 18^\circ 27' 12''$, temos:

   A) $33^\circ 33' 28''$
   B) $38^\circ 12' 28''$
   C) $39^\circ 28' 28''$
   D) $39^\circ 12' 28''$
   E) N. R. A.

3) Efetuando $55^\circ 15' 37'' - 20^\circ 42' 30''$, temos:

   A) $34^\circ 28' 7''$
   B) $34^\circ 33' 7''$
   C) $33^\circ 28' 7''$
   D) $33^\circ 33' 7''$
   E) N. R. A.

4) O quádruplo de $15^\circ 12' 20''$ é:

   A) $60^\circ 49' 20''$
   B) $58^\circ 48' 80''$

Nota: Os problemas assinalados com * estão resolvidos no final deste volume.

C) $60° 48' 60''$
D) $60° 49'$
E) N. R. A.

5) O complemento de $18° 42'$ é:

A) $72° 28'$
B) $71° 28'$
C) $71° 29'$
D) $70° 28'$
E) N. R. A.

6) Dois ângulos suplementares medem $3x - 40°$ e $2x + 60°$. O maior desses ângulos mede:

A) $56°$
B) $108°$
C) $124°$
D) $132°$
E) N. R. A.

7) O ângulo cujo suplemento excede de $6°$ o quádruplo do seu complemento é:

A) $58°$
B) $60°$
C) $62°$
D) $64°$
E) N. R. A.

8) As semi-retas OA e OB e a reta r $(0 \in r)$ formam em um mesmo semiplano três ângulos adjacentes expressos em grados por $2x + 10$, $5x - 3$ e $x + 25$. O maior desses ângulos mede:

A) 52 gr
B) 64 gr
C) 82 gr
D) 96 gr
E) 102 gr.

*9) Quatro semi-retas OA, OB, OC e OD formam os ângulos adjacentes $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}C$, $C\widehat{O}D$ e $D\widehat{O}A$, respectivamente proporcionais aos números 1, 2, 4 e 5. As bissetrizes de $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ formam:

A) 90°
B) 120°
C) 135°
D) 150°
E) N. R. A.

10) As semi-retas OA, OB, OC e OD formam os ângulos adjacentes $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}C$, $C\widehat{O}D$ e $D\widehat{O}A$, sendo os três primeiros proporcionais a 1, 3 e 6. Sabendo que OD é o prolongamento da bissetriz de $B\widehat{O}C$, o maior dos quatro ângulos mede:

A) 90°
B) 120°
C) 144°
D) 150°
E) N. R. A.

11) Um plano fica determinado por:

A) três pontos
B) três retas concorrentes em um ponto
C) três retas paralelas
D) um retá e dois pontos quaisquer
E) N. R. A.

12) Complete o quadro abaixo onde r, s, t, u e v são retas distintas

	r	s	t
u	//		⊥
v		⊥	
s	⊥		

O símbolo ⊥ aparece:

A) 3 vezes
B) 4 vezes
C) 5 vezes
D) 6 vezes
E) N. R. A.

13) Cinco retas distintas em um plano cortam-se em n pontos. O maior valor que n pode assumir é:

A) 5
B) 6
C) 10
D) 12
E) N. R. A.

14) Seja $A\widehat{O}B$ um ângulo e r uma reta do seu plano, que contém O, e situada na região não convexa. Sejam OX e OY as bissetrizes dos ângulos agudos que OA e OB formam com r. Se $A\widehat{O}B = 150°$, $X\widehat{O}Y$ mede:

A) 135°
B) 145°
C) 155°
D) 165°
E) 175°.

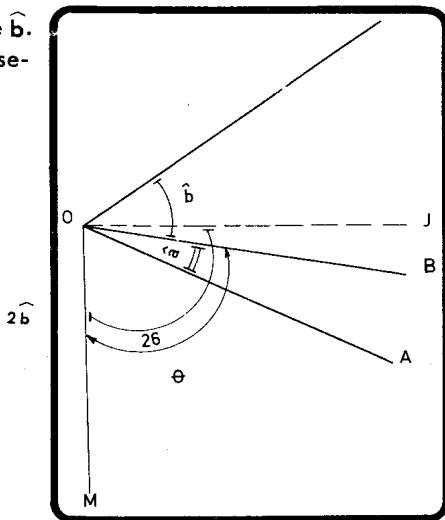
15) Calcule $\widehat{\theta}$ em função de $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$. Sabe-se que OJ é a bissetriz de $A\widehat{O}C$.

A) $\widehat{\theta} = \widehat{a} + \widehat{b}$

B) $\widehat{\theta} = 2(\widehat{a} + \widehat{b})$

C) $\widehat{\theta} = \dfrac{\widehat{a} + 2\widehat{b}}{2}$

D) $\widehat{\theta} = \dfrac{a + 3b}{2}$

E) N. R. A.

16) As bissetrizes de dois ângulos colaterais internos

A) são perpendiculares
B) são paralelas
C) formam 60°
D) formam um ângulo cuja medida depende da dos dois colaterais
E) N. R. A.

17) O ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 5 h 10 min.

A) 90°
B) 95°
C) 100°
D) 85°
E) N. R. A.

18) O ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 4 h 42 min.

A) 120°
B) 141°
C) 108°
D) 111°
E) N. R. A.

19) A que horas pela primeira vez após o meio-dia, os ponteiros de um relógio formam 110°?

A) 12 h 18 min aproximadamente
B) 12 h 20 min
C) 13 h 22 min
D) 13 h 23 min
E) N. R. A.

20) Um polígono é convexo, quando:

A) ele é regular
B) seus ângulos são todos agudos
C) existe uma reta que o corta somente em 2 pontos
D) o número de vértices e o de lados são iguais
E) N. R. A.

*21) O número de diagonais que se pode traçar por um dos vértices de um icoságono é:

A) 10
B) 12
C) 17
D) 20
E) N. R. A.

22) O polígono cujo número de diagonais é igual ao de lados é o:

A) pentágono
B) hexágono
C) heptágono
D) octógono
E) N. R. A.

23) O polígono de 14 diagonais tem gênero igual a:

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) N. R. A.

24) O gênero do polígono cujo número de diagonais é o quádruplo do número de lados é:

A) 5
B) 7
C) 9
D) 11
E) N. R. A.

*25) O gênero do polígono cujo número de diagonais excede de 25 o número de lados é:

A) 9
B) 10
C) 12

D) não existe
E) N. R. A.

26) A razão entre os gêneros de dois polígonos é $\frac{2}{3}$ e a razão entre os números de diagonais é $\frac{1}{3}$ O polígono de maior gênero é o:

A) hexágono
B) eneágono
C) dodecágono
D) pentadecágono
E) N. R. A.

27) Se a razão entre o número de diagonais e de lados de um polígono é um número inteiro positivo, então o número de lados do polígono é:

A) par
B) ímpar
C) múltiplo de 3
D) não existe
E) N. R. A.

28) A diferença entre os gêneros de dois polígonos é 3. O total de diagonais desses dois polígonos é 9. Então:

A) um dos polígonos é o eneágono.
B) um dos polígonos é o pentágono
C) o de menor gênero é um quadrilátero
D) um dos polígonos não tem diagonais
E) N. R. A.

29) A mediana de um triângulo:

A) divide esse triângulo em dois outros congruentes
B) é perpendicular ao lado oposto
C) é perpendicular à bissetriz externa

D) coincide com a bissetriz interna se os dois lados adjacentes forem congruentes
E) nada disso.

30) Em um triângulo retângulo:

A) existe apenas um altura
B) não pode ser isósceles
C) cada ângulo externo é maior que o interno adjacente
D) as bissetrizes dos ângulos formam 45° com os lados opostos
E) nada disso.

31) Os dois menores lados de um triângulo medem 14 cm e 4 cm. Qual dos números abaixo pode representar a medida em cm do 3.º lado?

A) 9
B) 11
C) 17
D) 19
E) N. R. A.

*32) Os lados de um triângulo são: 10, $x + 2$, $12 - 2x$. O número de valores inteiros possíveis de x é:

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) mais de 5.

33) Os lados de um triângulo são: $16 - x$, $2x + 2$, $x + 12$.

Sejam os conjuntos: $A = \{ x \in R \mid 10 < x < 15 \}$

$B = \{ x \in R \mid 0 < x < 15 \}$

$C = \{ x \in R \mid 5 < x < 10 \}$

$D = \{ x \in R \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 13 \}$.

Diremos que x_1 é *solução*, se para $x = x_1$ o triângulo existe.

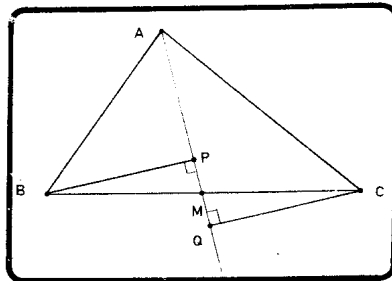
A) não existem soluções em A.

B) x é a solução desde que $x \in B$

C) o triângulo existe para todo $x \in C$

D) D é o conjunto de todas as soluções do problema

E) N. R. A.

34) Na figura abaixo, sendo $\overline{AM}$ uma mediana, podemos concluir que:

A) $M\hat{B}P = M\hat{A}C$

B) $\overline{AP} = \overline{PQ}$

C) $\triangle ABM = \triangle ACM$

D) $\overline{BP} = \overline{CQ}$

E) N. R. A.

35) Em um triângulo ABC, seja D o pé da bissetriz interna de $\hat{A}$ Traça-se $\overline{DE}$ paralela a $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ paralela a $\overline{CB}$. Então:

A) $\overline{AE} = \overline{EC}$

B) $\overline{AE} = \overline{DC}$

C) $\overline{AE} = \overline{BD}$

D) $\overline{AE} = \overline{BF}$

E) N. R. A.

36) Em um triângulo ABC, as bissetrizes de B e C encontram-se em O. Traça-se $\overline{DOE}$ paralela a BC (D em $\overline{AB}$ e E em $\overline{AC}$). Então:

A) DE = AD + EC

B) DE = AE + BD

C) DE = BD + EC

D) DE = BC − AD

E) N. R. A.

37) A soma dos ângulos internos de um hexágono convexo é:

A) 520°
B) 600°
C) 720°
D) 900°
E) N. R. A.

38) O gênero do polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é 900° é:

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) N. R. A.

39) A soma dos ângulos internos de dois polígonos convexos é 1620°. Se a diferença entre os gêneros é 3, um dos polígonos tem gênero igual a:

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) N. R. A.

40) O número de diagonais do polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é 1440° é:

A) 20
B) 27
C) 35
D) 44
E) N. R. A.

41) Duas bissetrizes internas de dois ângulos adjacentes de um polígono eqüiângulo formam um ângulo dado por:

A) $\frac{360°}{n}$

B) $\dfrac{180^\circ (n-2)}{n}$

C) $\dfrac{180^\circ}{n}$

D) $\dfrac{90^\circ (n-2)}{n}$

E) N. R. A.

42) Os ângulos externos de um polígono regular medem 40°. O número de diagonais desse polígono é:

A) 14
B) 20
C) 27
D) 35
E) N. R. A.

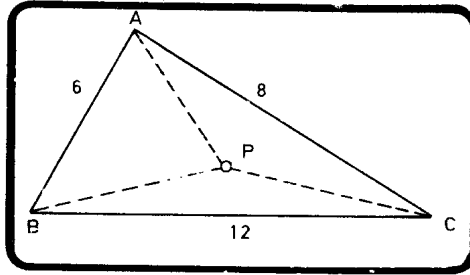
43) O polígono regular cujo ângulo interno é o triplo do externo tem gênero igual a:

A) 6
B) 9
C) 10
D) 12
E) N. R. A.

44) Seja ABCD...... um polígono regular. Se as diagonais AC e BD formam 20°, o número de diagonais desse polígono é:

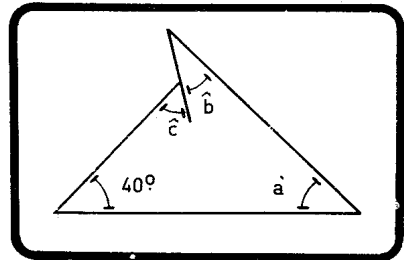
A) 110
B) 127
C) 132
D) 135
E) N. R. A.

45) A soma das distâncias do ponto *P* aos vértices do triângulo da figura pode ser igual a:

A) 10
B) 12
C) 13
D) 18
E) N. R. A.

46) Assinale a afirmativa falsa:

A) Se um polígono convexo P_1 está contido no interior de um polígono qualquer P_2, o perímetro de P_1 é menor que o de P_2.
B) Se, em um triângulo, uma ceviana é ao mesmo tempo mediana e bissetriz, esse triângulo é isósceles.
C) Em um triângulo isósceles, as alturas relativas aos lados congruentes são congruentes.
D) Em todo triângulo, cada ângulo interno é o suplemento da soma dos outros dois.
E) Uma das afirmativas anteriores é falsa.

*47) Se $S = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$, considerando a figura abaixo, podemos afirmar que:

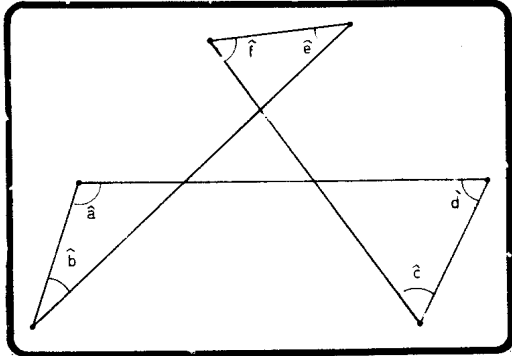
A) $S = 180°$
B) $S = 80°$
C) $S = 140°$
D) nada se pode afirmar sobre S.
E) N. R. A.

48) Se $S = \widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} + \widehat{d} + \widehat{e} + \widehat{f}$, considerando a figura abaixo, podemos afirmar que:

A) $S = 360°$

B) $S = 540°$

C) $S = 420°$

D) S é variável

E) N. R. A.

49) Da figura abaixo sabe-se que:

1) $\widehat{A} = 80°$ e $\widehat{B} = 60°$

2) AM = AP

3) BM = BQ

4) MP = MQ.

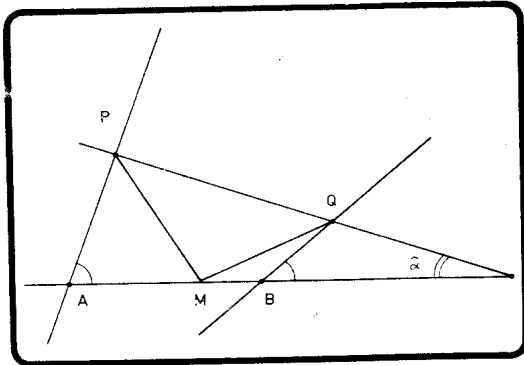
O ângulo $\widehat{\alpha}$ mede:

A) 10°

B) 12°

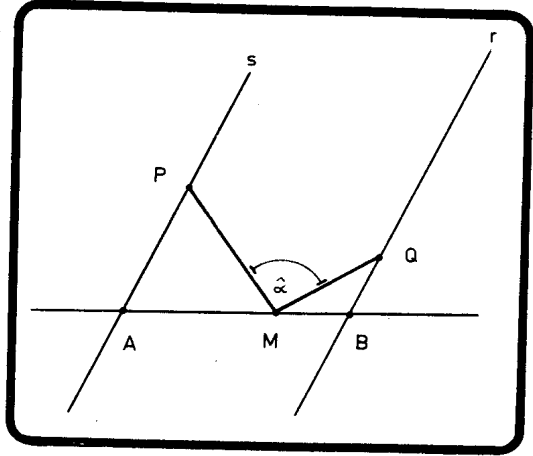
C) 15°

D) 20°

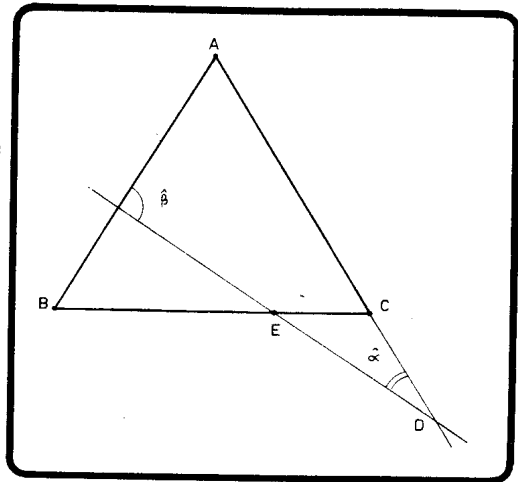
E) N. R. A.

50) Da figura abaixo sabe-se que:

1) $r // s$
2) $AM = AP$
3) $BM = BQ$.

Então, $\widehat{\alpha}$ vale:

A) 90°
B) 100°
C) faltam dados
D) é variável
E) N. R. A.

51) Na figura, tem-se $AB = AC$ e $CD = CE$.

Podemos afirmar que:

A) $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 90°$
B) $\widehat{\beta} = 2\widehat{\alpha}$
C) $\widehat{\beta} = 3\widehat{\alpha}$
D) $\widehat{\beta} = \frac{3}{2}\widehat{\alpha}$
E) N. R. A.

52) Na figura tem-se

AB = AC e

AD = DC = CB.

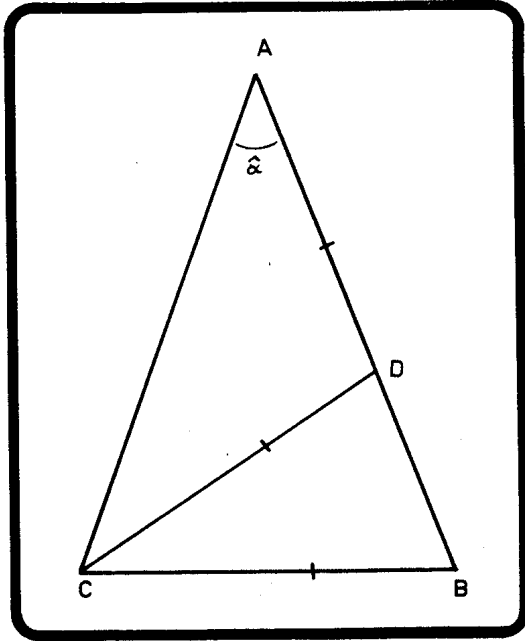
O ângulo $\hat{\alpha}$ mede:

A) 20°

B) 30°

C) 32°

D) 36°

E) 40°.

*53) O ângulo formado pelas bissetrizes internas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo mede 50°. Então, o ângulo $\hat{A}$ mede:

A) 80°
B) 100°
C) 130°
D) não existe o triângulo
E) N. R. A.

54) Em um triângulo retângulo, a altura e bissetriz relativas à hipotenusa formam 14°. O maior dos ângulos agudos mede:

A) 48°
B) 50°
C) 53°
D) 54°
E) N. R. A.

55) Em um triângulo retângulo, a altura e mediana relativas à hipotenusa formam 20°. O maior dos ângulos agudos mede:

A) 50°
B) 55°
C) 60°
D) 64°
E) N. R. A.

56) Da figura sabe-se que

1) PB = PR
2) QC = QR.

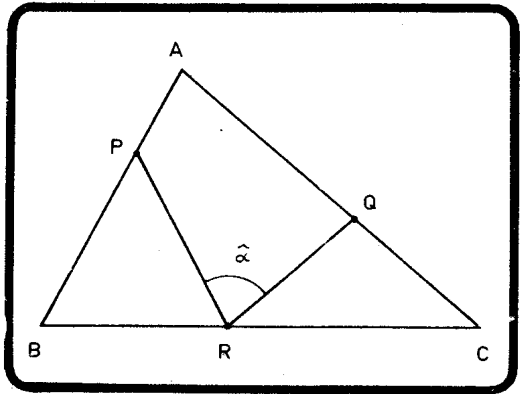
Então $\widehat{\alpha}$:

A) é maior que $\widehat{A}$, sempre

B) é igual a $\dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$

C) é maior que $\dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$, sempre

D) é igual a $\widehat{A}$

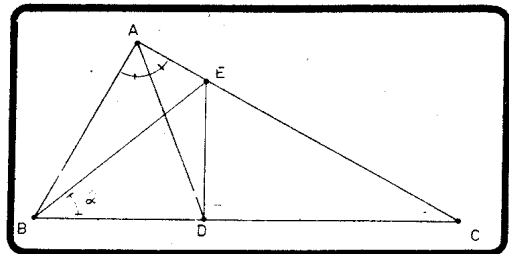
E) N. R. A.

57) Da figura, sabe-se que D é o pé da bissetriz do ângulo reto $\widehat{A}$ do triângulo retângulo ABC. Se $\overline{DE}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, o ângulo $\widehat{\alpha}$:

A) é igual a $\widehat{c}$

B) é igual a $\dfrac{90° + \widehat{c}}{2}$

C) é igual a 45°

D) é maior que 45°

E) N. R. A.

*58) Se P é um ponto qualquer da base BC de um triângulo isósceles ABC, a soma das distâncias de P aos lados congruentes é constante e igual

A) à base BC

B) à altura relativa a um dos lados congruentes

C) a um dos lados congruentes

D) não é constante

E) N. R. A.

59) A soma das distâncias de um ponto P, interior a um triângulo eqüilátero aos lados, é constante e igual

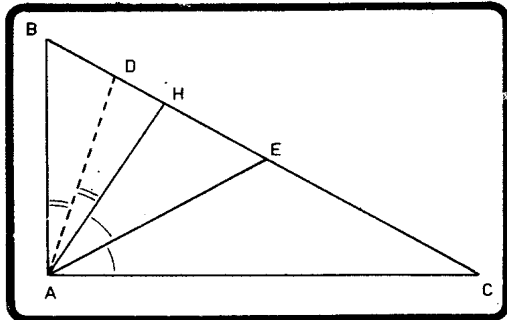
A) ao lado do triângulo

B) a $\frac{2}{3}$ do lado do triângulo

C) à altura do triângulo

D) não é constante

E) N. R. A.

60) O triângulo ABC da figura é retângulo em $\widehat{A}$. $\overline{AH}$ é altura e $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ são as bissetrizes dos ângulos $H\widehat{A}B$ e $H\widehat{A}C$.

Considere as afirmações:

1) $D\widehat{A}E = 45°$

2) $\triangle$ ADE é isósceles

3) $\triangle$ BAE é isósceles

4) $\triangle$ CAD é isósceles.

Quantas estão certas?

A) nenhuma

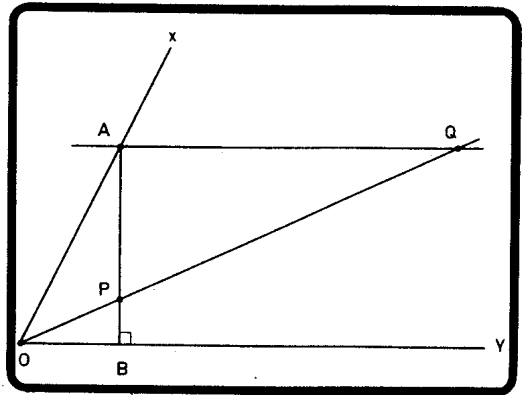
B) 1
C) 2
D) 3
E) todas.

61) Um ponto A qualquer é considerado sobre o lado Ox do ângulo $x\widehat{O}y$ da figura.

Traçamos então:

1) $\overline{AB} \perp Oy$
2) $\overline{AQ} // Oy$
3) $\overline{OPQ}$ tal que $PQ = 2\ OA$.

Se $P\widehat{O}B = 26°$, $x\widehat{O}y$ mede:

A) 61°
B) 66°
C) 72°
D) 78°
E) N. R. A.

*62) Se m_a é a medida da mediana relativa ao lado a de um triângulo de lados a, b e c, então:

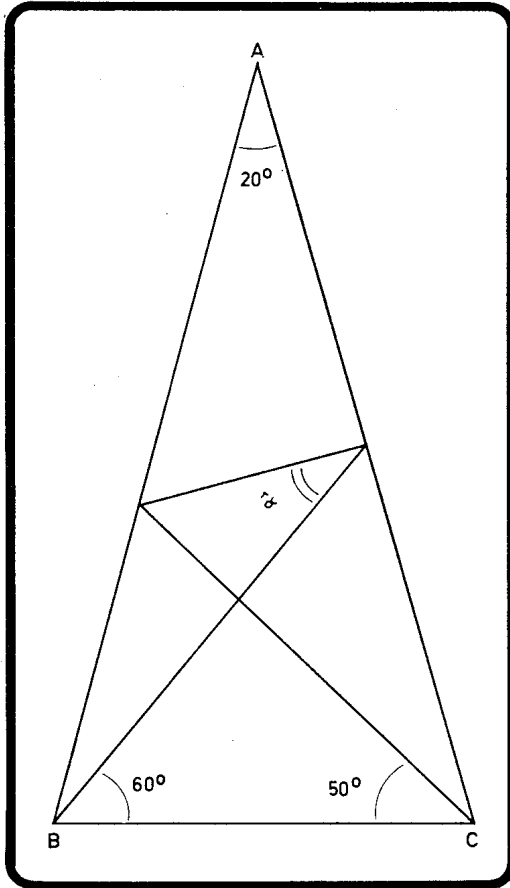
A) $m_a < a$

B) $m_a > \frac{b + c}{2}$

C) $m_a = \frac{a}{2}$

D) $m_a < \frac{b + c}{2}$

E) N. R. A.

63) Na figura abaixo, AB = AC. Calcule $\widehat{\alpha}$.

A) 20°
B) 28°
C) 29° 30′
D) 30°
E) N. R. A.

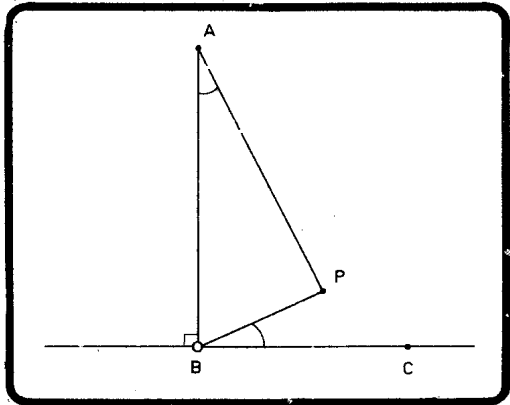
64) Seja r perpendicular em B ao segmento AB da figura. Se *P* é tal que $B\widehat{A}P = P\widehat{B}C$, o triângulo ABP

A) é sempre acutângulo

B) é sempre retângulo

C) é sempre obtusângulo

D) é sempre isósceles

E) N. R. A.

65) O quadrilátero que possui os quatro lados congruentes é o:

A) paralelogramo

B) retângulo

C) losango

D) quadrado

E) N. R. A.

66) Considere as afirmativas:

1) Todo trapézio inscritível é isósceles

2) Todo retângulo é inscritível

3) Todo losango é circunscritível.

São verdadeiras:

A) somente 1

B) somente 2

C) somente 2 e 3

D) nenhuma

E) todas.

67) Considere as afirmativas:

1) Um paralelogramo que possui as diagonais congruentes é um quadrado.
2) Um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes não é um paralelogramo.
3) Um quadrilátero que possui diagonais perpendiculares é um quadrado.
4) Um quadrilátero que possui diagonais congruentes e perpendiculares é um quadrado.

São verdadeiras:

A) 1 somente
B) 2 somente
C) 2 e 4 somente
D) 1, 2 e 4 somente
E) nenhuma.

68) Um paralelogramo ABCD é tal que $\widehat{A} = 60°$, AB = CD = 10 cm e BC = AD = 8 cm. Suas bissetrizes internas formam um quadrilátero cujo menor lado mede:

A) 1 cm
B) 1,5 cm
C) 2 cm
D) 4 cm
E) N. R. A.

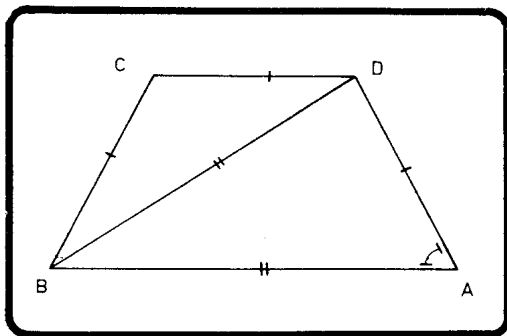
69) Um trapézio ABCD de base maior AB = 10 cm é tal que $\widehat{A} = \widehat{B} = 60°$, sendo a diagonal AC perpendicular ao lado CB. O perímetro desse trapézio é:

A) 20 cm
B) 25 cm
C) 30 cm
D) indeterminado
E) N. R. A.

70) Do trapézio da figura, sabe-se que

$AD = DC = CB$ e
$BD = BA$

O ângulo $\widehat{A}$ mede:

A) 60°
B) 64°
C) 68°
D) 72°
E) N. R. A.

*71) Calcule o perímetro de um trapézio isósceles cujas bases medem 12 cm e 8 cm, sabendo que as diagonais são bissetrizes dos ângulos adjacentes à base maior.

A) 24 cm
B) 28 cm
C) 30 cm
D) 36 cm
E) N. R. A.

72) Um trapézio ABCD de bases AB e CD é tal que:

$\widehat{A} = \widehat{B} = 60°$
$AD = 8$ cm
$DC = 7$ cm

A base média desse trapézio mede:

A) 8 cm
B) 9 cm
C) 10 cm
D) 11 cm
E) N. R. A.

73) Sejam ABCD um quadrado, ABP um triângulo eqüilátero interior e BCQ um triângulo eqüilátero exterior. O ângulo $D\widehat{P}Q$ mede:

A) 160°
B) 170°

C) 175°
D) 180°
E) N. R. A.

74) Se um trapézio isósceles é circunscritível a um círculo, o comprimento dos lados não paralelos é igual ao da

A) base maior
B) base menor
C) base média
D) mediana de Euler
E) N. R. A.

75) Se dois ângulos internos de um trapézio medem 110° e 50°, os outros dois medem:

A) 110° e 50°
B) 130° e 80°
C) 130° e 70°
D) o problema é indeterminado
E) N. R. A.

*76) Sejam a, b e d as distâncias dos vértices A, B e D de um paralelogramo ABCD a uma reta r que contém o vértice C. Então, $a = b + d$

A) sempre
B) nunca
C) só se r for bissetriz externa de C
D) só se r for perpendicular a CD ou a CB
E) N. R. A.

77) A base maior de um trapézio isósceles mede 13 cm, e os lados não paralelos medem 4 cm. Qual dos conjuntos abaixo é o conjunto dos valores que a base menor pode assumir para que exista o trapézio?

A) entre 5 e 21
B) entre 0 e 21
C) entre 0 e 13

D) entre 5 e 13

E) entre 13 e 21.

78) Em um trapézio, a base maior mede 12 cm e a diferença entre a base menor e a mediana de Euler mede 3 cm. A base média desse trapézio mede:

A) 7 cm

B) 8 cm

C) 9 cm

D) 10 cm

E) N. R. A.

*79) Calcule a base menor de um trapézio sabendo que a soma da base média com a mediana de Euler é igual a 12 cm e que a razão entre as bases é 2.

A) 5 cm

B) 6 cm

C) 8 cm

D) 9 cm

E) N. R. A.

80) Em um trapézio as diagonais dividem a base média em segmentos proporcionais a 2, 1 e 2. A razão entre as bases do trapézio é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{4}$

E) N. R. A.

81) Considere um círculo de centro O e raio R e dois diâmetros perpendiculares $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Seja M um ponto qualquer do círculo e trace $\overline{MP}$ e $\overline{MQ}$ perpendiculares a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Considere as afirmações:

1) Quando M não coincide com A, B, C ou D, PQ é menor do que R.
2) PQ é sempre constante e igual a R.
3) O lugar geométrico do ponto médio de $\overline{PQ}$ é um quadrado cujos vértices são os pontos médios de $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$.
4) O lugar geométrico do ponto médio de PQ é um círculo de centro O e raio $\frac{R}{2}$.

São verdadeiras:

A) somente 1
B) somente 1 e 3
C) somente 2
D) somente 2 e 4
E) N. R. A.

82) Considere os pontos A e B localizados em um semiplano determinado pela reta r. Seja M o ponto de r tal que MA + MB é mínimo. Então:

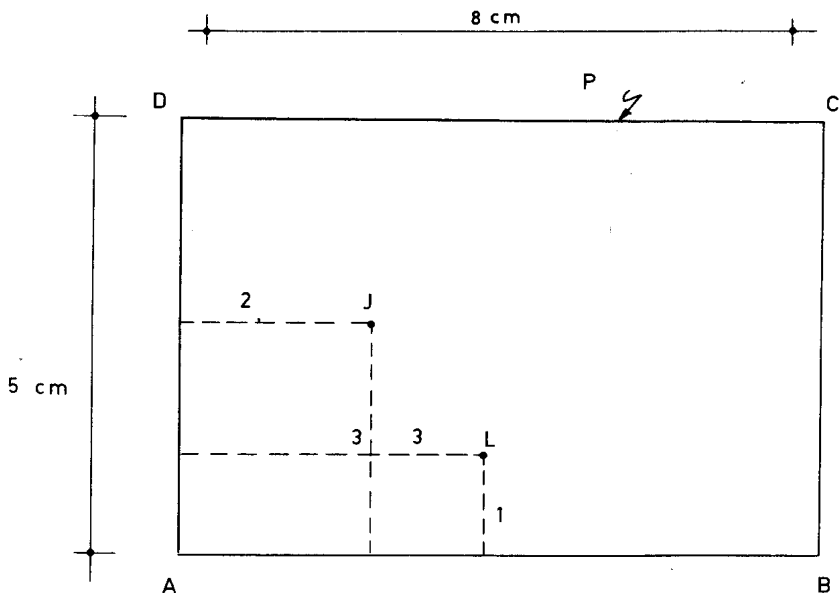
A) M é a projeção ortogonal de A ou B sobre r.
B) M é a projeção do ponto médio de $\overline{AB}$ sobre r.
C) M é a interseção da mediatriz de $\overline{AB}$ com r.
D) M é a interseção da reta AB com r.
E) N. R. A.

83) Considere os pontos A e B localizados em um mesmo semiplano determinado pela reta r. Seja M o ponto de r tal que MA — MB é máximo (A está mais afastado da reta que B). Então:

A) M é a projeção ortogonal de A ou B sobre r.
B) M é a projeção do ponto médio de $\overline{AB}$ sobre r.
C) M é a interseção da mediatriz de $\overline{AB}$ sobre r.

D) M é a interseção da reta AB com r.

E) N. R. A.

84)

O desenho representa uma mesa de bilhar com AB = 8 cm e AD = 5 cm (no desenho) e duas bolas cujas posições estão indicadas. Determine, gráfica ou analiticamente, a posição de um ponto *P* da tabela $\overline{DC}$ que a bola J deve atingir para que, após tocar nas tabelas $\overline{CB}$ e $\overline{BA}$, alcance a bola L. Nessa situação, $\overline{DP}$ mede:

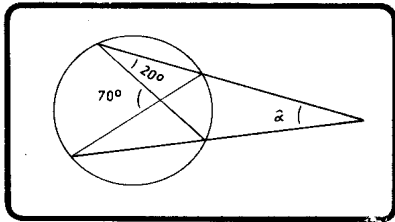
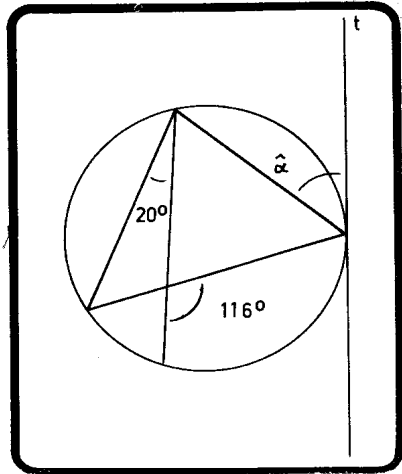
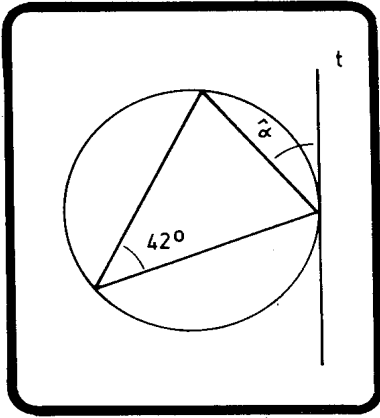
A) 4 cm

B) 4,5 cm

C) 4,75 cm

D) 5 cm

E) N. R. A.

85) Calcule $\hat{\alpha}$ nas figuras.

A soma das três respostas é:

A) 102°
B) 108°
C) 112°
D) 116°
E) N. R. A.

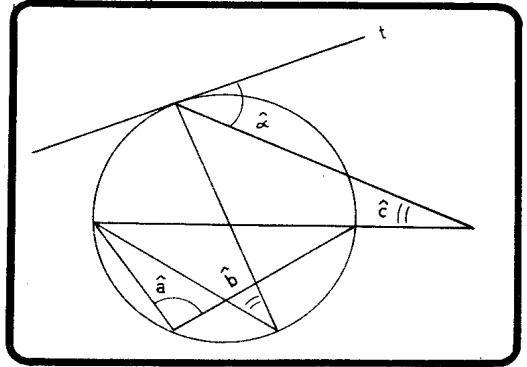
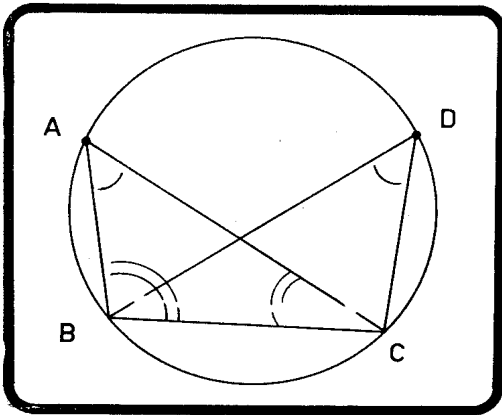
86) O ângulo $\widehat{\alpha}$ da figura mede:

A) 20°

B) 22° $\widehat{a} = 90°$

C) 25° $\widehat{b} = 40°$

D) 50° $\widehat{c} = 15°$

E) N. R. A.

87)

Na figura, $B\widehat{A}C = 46°$ e $B\widehat{C}A = 28°$, calcule $A\widehat{B}C$.

A) 96°

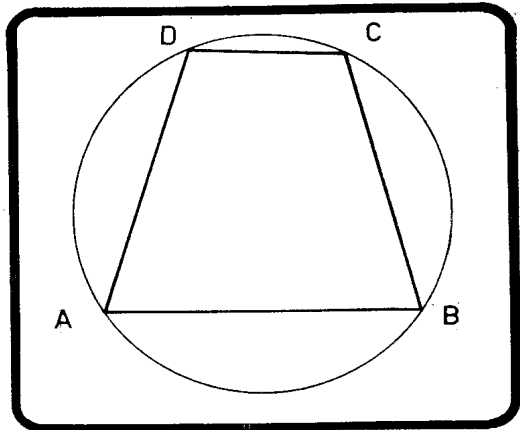
B) 106°

C) 112°

D) 115°

E) N. R. A.

88) Do trapézio da figura sabe-se que $\widehat{A} = 75°$ e que $\widehat{CD} = 60°$. O arco $\widehat{AB}$ mede:

A) 90°
B) 120°
C) 150°
D) o problema é indeterminado.
E) N. R. A.

89) Em um círculo de centro O, prolonga-se uma corda AB de um comprimento $\overline{BC}$ igual ao raio. A reta CO corta o círculo em D e E (D entre O e C). Se $A\widehat{C}E = 20°$, $A\widehat{O}E$ mede:

A) 60°
B) 80°
C) 40°
D) 45°
E) N. R. A.

90) Um triângulo ABC está inscrito em um círculo de raio 6 cm e tem seu ângulo interno $\widehat{A} = 30°$. Se o perímetro do triângulo é igual a 16 cm, a soma AB + AC é igual a:

A) 6 cm
B) 9 cm
C) 10 cm
D) 11 cm
E) 13 cm

*91) Sejam os pontos A, B, C e D de um círculo tais que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sejam, respectivamente, os lados do pentágono e pentadecágono regulares inscritos. As retas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ formam um ângulo de:

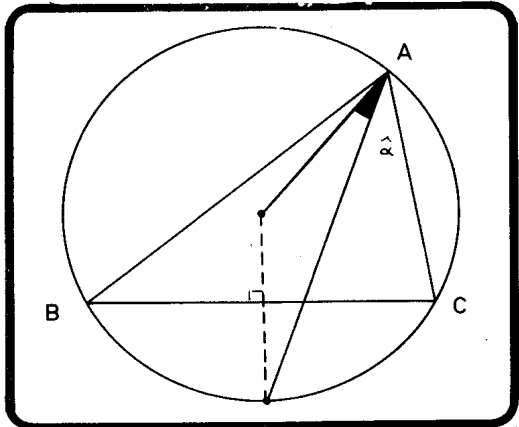
A) 20°
B) 24°

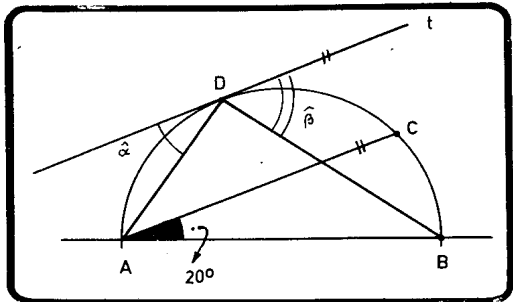
C) 36°
D) 44°
E) N. R. A.

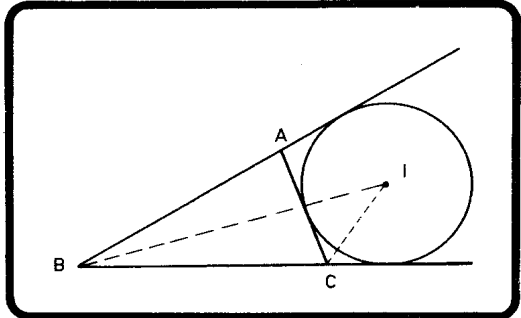
92) A e B são pontos de um círculo que o dividem em arcos de medidas proporcionais a 7 e 3. As tangentes traçadas por A e B formam:

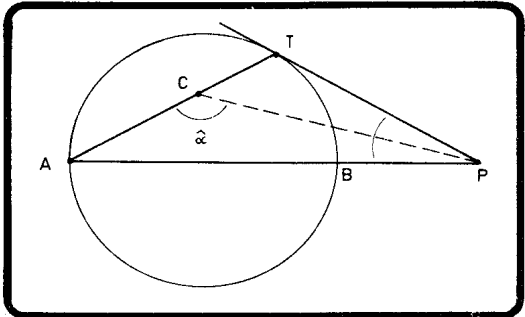
A) 60°
B) 66°
C) 72°
D) 78°
E) N. R. A.

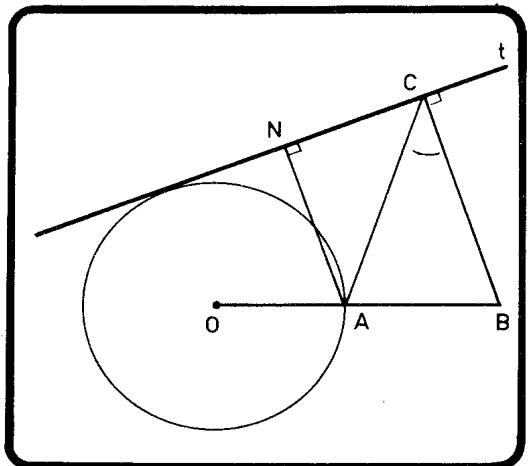
93) Da figura sabe-se que $\overset{\frown}{BC} = 110°$ e que $\overset{\frown}{AC} = 113°$. Então, $\widehat{\alpha}$ mede:

A) 12°
B) 10°
C) 8°
D) 6°
E) N. R. A.

94) Na figura, AB é o diâmetro do semicírculo que forma 20° com a corda AC. Sendo t paralela a AC, os ângulos $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ medem respectivamente:

A) 20° e 70°
B) 25° e 65°
C) 30° e 60°
D) 35° e 55°
E) N. R. A.

95) Se na figura, onde o círculo é tangente a $\overline{AC}$ e aos prolongamentos de $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$, $\hat{A} = 72°$, então $C\hat{I}B$ mede:

A) 32°
B) 36°
C) 45°
D) 48°
E) N. R. A.

96) Na figura que se segue, $\overline{AB}$ é o diâmetro do círculo, P é um ponto qualquer de seu prolongamento, $\overline{PT}$ é uma tangente e $\overline{PC}$ é a bissetriz de $T\hat{P}A$. Então,

A) $\hat{\alpha} = 4\, T\hat{P}A$
B) $\hat{\alpha} = 135°$
C) $\hat{\alpha} = 90° + T\hat{P}A$
D) nada se pode afirmar sobre $\hat{\alpha}$.
E) N. R. A.

97) Na figura, sabe-se que OA = AB, N e C são as projeções ortogonais de A e B sobre uma tangente t, e que $O\hat{A}C = 126°$. Calcule $A\hat{C}B$.

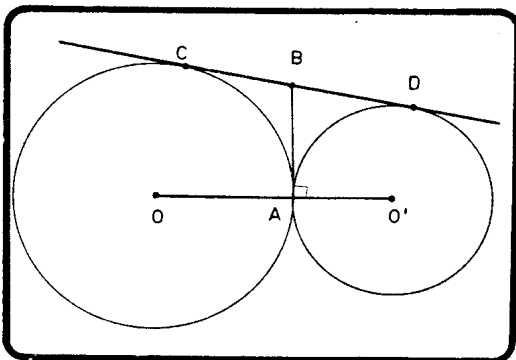
A) 42°
B) 56°
C) 45°
D) 50°
E) N. R. A.

98) Considerando a figura ao lado, podemos afirmar que:

A) $DO' = CD$

B) $AB = \dfrac{DO'}{2}$

C) $AB = \dfrac{CD}{2}$

D) $AB = \dfrac{OC + O'D}{2}$

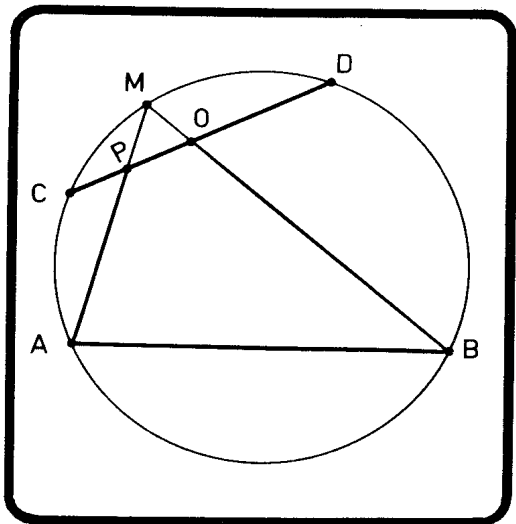
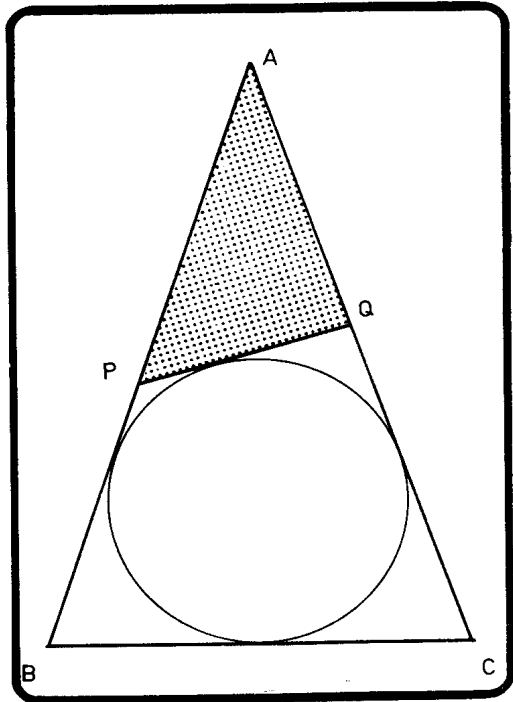
E) N. R. A.

99) Considerando a figura ao lado, se M varia sobre o menor arco $\overset{\frown}{CD}$, o quadrilátero PQBA será inscritível.

A) sempre

B) nunca

C) se M for médio de $\overset{\frown}{CD}$

D) se $\overset{\frown}{CM} = 2\,\overset{\frown}{MD}$ ou $\overset{\frown}{CM} = \dfrac{1}{2}\,\overset{\frown}{MD}$

E) N. R. A.

100) Um triângulo ABC é tal que AB = 8 cm, AC = 9 cm e BC = = 5 cm. Considera-se $\overline{PQ}$ variável, tangente ao círculo inscrito, como mostra a figura.

O perímetro do triângulo APQ

A) é igual a 12 cm
B) é igual a 14 cm
C) é igual a 11 cm
D) é variável
E) N. R. A.

101) O raio do círculo circunscrito a um triângulo ABC é igual ao lado BC. O ângulo $\widehat{A}$ desse triângulo mede:

A) 20°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) N. R. A.

102) Da figura ao lado sabe-se que:

$\overset{\frown}{DAC} = 150°$

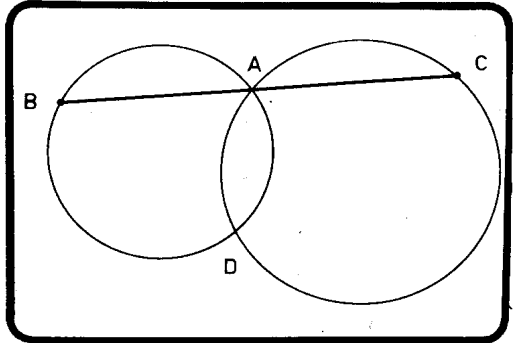
$\overset{\frown}{AD} = 110°$ (sobre o círculo menor). Então, $\overset{\frown}{AB}$ mede:

A) 80°

B) 100°

C) 110°

D) 120°

E) N. R. A.

103) Sejam H, I e O respectivamente o ortocentro, o incentro e o circuncentro de um triângulo ABC, e seja M o ponto médio de $\overline{AC}$. É falso afirmar que:

A) $B\hat{A}H = C\hat{A}O$

B) $A\hat{B}I = C\hat{B}I$

C) $H\hat{A}I = O\hat{A}I$

D) $A\hat{B}C = A\hat{O}M$

E) uma das anteriores é falsa.

104) Sejam dois círculos exteriores de centros O e O′ e raios r e r′. Sejam ainda dois pontos, A do primeiro círculo e A′ do segundo, variáveis de tal forma que $\overline{OA}$ e $\overline{O'A'}$ sejam sempre paralelos. O lugar geométrico do ponto médio de $\overline{AA'}$ é:

A) uma elipse

B) um círculo tangente aos dois primeiros

C) um círculo de raio igual a $r + r'$

D) um círculo de raio igual a $\dfrac{r + r'}{2}$

E) N. R. A.

105) CICE — 69

Considere as afirmações:

1) Em um quadrilátero convexo, um dos ângulos formados pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos é igual à metade da soma dos outros dois.

2) Em um quadrilátero convexo, um dos ângulos formados pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos é menor que a metade da soma dos outros dois.

3) Em um quadrilátero convexo, um dos ângulos formados pelas bissetrizes de dois ângulos opostos é igual à metade da diferença dos outros dois.

4) Em um quadrilátero convexo, os ângulos formados pelas bissetrizes de dois ângulos opostos são maiores que a metade da diferença dos outros dois.

A) 2 e 4 são verdadeiras
B) 1 e 3 são verdadeiras
C) 2 é verdadeira
D) 1 e 4 são verdadeiras
E) 2 e 3 são verdadeiras.

106) Um segmento $\overline{AB}$ desloca-se de tal forma que A e B são pertencentes, respectivamente, às retas r e s, perpendiculares. O lugar geométrico do ponto médio de $\overline{AB}$ é:

A) um quadrado
B) uma esfera
C) um círculo
D) uma elipse
E) nada disso

107) Se em um triângulo ABC, a base $\overline{BC}$ é fixa e o vértice A variável sobre um semiplano determinado por BC de tal forma que o ângulo $\widehat{A}$ seja constante, o lugar geométrico do incentro desse triângulo é:

A) um arco de círculo
B) um segmento de reta

C) um par de segmentos de retas concorrentes
D) um arco de elipse
E) N. R. A.

108) Sejam α e β planos paralelos e A e B pontos de α e de β, respectivamente. O lugar geométrico do ponto médio de $\overline{AB}$ é:

A) uma reta
B) um círculo
C) um plano
D) um segmento de reta
E) N. R. A.

109) O lugar geométrico dos pontos do plano que eqüidistam de três pontos não colineares é:

A) um ponto
B) uma reta
C) um plano
D) a união de 3 retas
E) N. R. A.

110) Os pontos médios dos lados de um quadrilátero formam um

A) paralelogramo
B) retângulo
C) losango
D) quadrado
E) N. R. A.

111) Os pontos M, N e P pertencem um a cada lado de um triângulo ABC. O perímetro do triângulo MNP será mínimo se seus vértices forem

A) os pés das bissetrizes internas
B) os pés das medianas
C) os pés das alturas
D) quaisquer porque o perímetro é constante
E) N. R. A.

112) Sejam: r e s retas concorrentes
n → n.° de planos perpendiculares a r e s

Então,

A) $n = 0$
B) $n = 1$
C) $n = 2$
D) $n = \infty$
E) N. R. A.

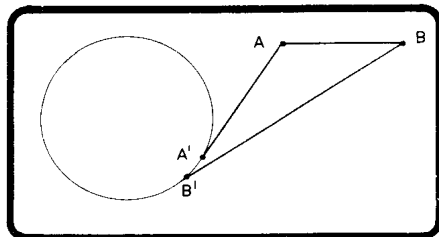
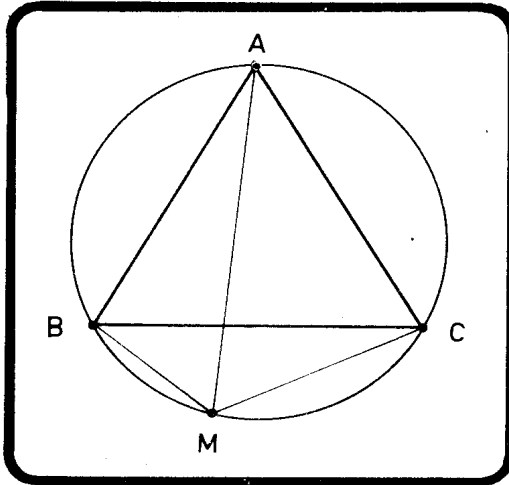
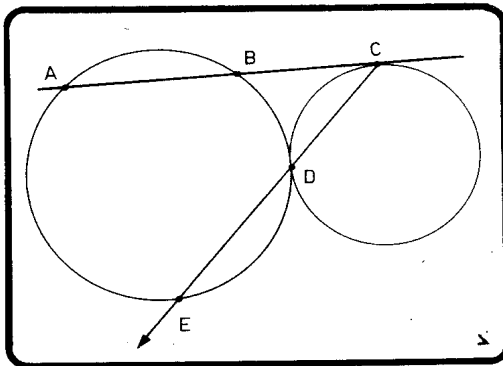
113) Sejam: A, B, C → pontos não colineares
n → n.° de retas do plano ABC eqüidistantes de A, B e C. Então,

A) $n = 0$
B) $n = 1$
C) $n = 2$
D) $n = 3$
E) N. R. A.

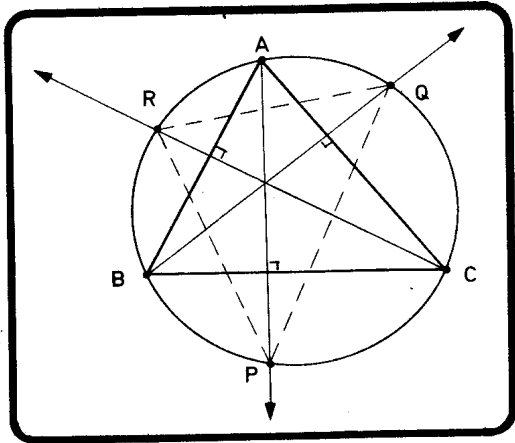
114) Sejam: π e π' → planos perpendiculares
$\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ → ângulos que uma reta qualquer forma com π e π', respectivamente.

Então,

A) $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 90°$
B) $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = 45°$
C) $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} \leqslant 90°$
D) $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} \leqslant 45°$
E) N. R. A.

115) Prove que, se $BB' - AA' = AB$, a reta AB é tangente ao círculo.

116) Prove que, sendo o triângulo ABC eqüilátero e sendo M um ponto qualquer de $\widehat{BC}$, MA = MB + MC.

117) Prove que, de acordo com a figura abaixo, E é médio do maior arco AB.

118) Considere um círculo de centro O, um diâmetro $\overline{AOB}$ e um ponto M do círculo. Prolonga-se $\overline{AM}$ de um segmento $\overline{MN}$ igual a AM. $\overline{NO}$ e $\overline{MB}$ cortam-se em *P*. Prove que NP = 2 PO.

119) Dado um triângulo ABC, cujos ângulos medem: $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 70°$ e $\widehat{C} = 50°$,

calcule os ângulos internos do triângulo formado pelas interseções das alturas com o círculo circunscrito.

120) Com os lados de um paralelogramo constroem-se quadrados exteriores ao mesmo. Prove que os centros desses quadrados formam um outro quadrado.

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

1 — E	15 — D	29 — D	43 — E
2 — D	16 — A	30 — E	44 — D
3 — B	17 — B	31 — C	45 — D
4 — A	18 — D	32 — B	46 — E
5 — E	19 — B	33 — C	47 — C
6 — C	20 — E	34 — D	48 — A
7 — C	21 — C	35 — D	49 — A
8 — E	22 — A	36 — C	50 — A
9 — C	23 — C	37 — C	51 — C
10 — C	24 — D	38 — B	52 — D
11 — E	25 — B	39 — C	53 — A
12 — C	26 — B	40 — C	54 — E
13 — C	27 — B	41 — A	55 — B
14 — D	28 — D	42 — C	56 — D

57 — D
58 — B
59 — C
60 — D
61 — D
62 — D
63 — D
64 — B
65 — C
66 — E
67 — E
68 — A
69 — B
70 — D
71 — D
72 — D
73 — D
74 — C
75 — D
76 — A
77 — D
78 — C
79 — B
80 — C
81 — D
82 — E
83 — D
84 — C
85 — D
86 — C
87 — B
88 — B
89 — A
90 — C
91 — B
92 — C
93 — D
94 — D
95 — B
96 — B
97 — A
98 — C
99 — C
100 — A
101 — B
102 — B
103 — E
104 — D
105 — B
106 — C
107 — A
108 — C
109 — A
110 — A
111 — C
112 — A
113 — D
114 — C

119 — $\hat{P} = 60°$
$\hat{Q} = 40°$
$\hat{R} = 80°$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

9 — $A\hat{O}B = x$

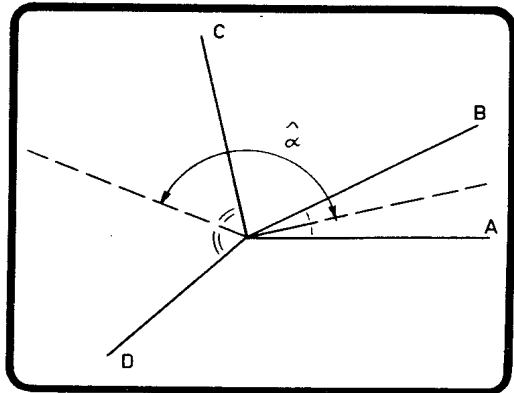
$B\hat{O}C = 2x$

$C\hat{O}D = 4x$

$D\hat{O}A = 5x$

Como a soma desses ângulos é igual a 360°, temos:

$12x = 360° \implies$

$\implies x = 30°.$

Então, $A\widehat{O}B = 30°$, $B\widehat{O}C = 60°$ e $C\widehat{O}D = 120°$.

$$\widehat{\alpha} = \frac{30}{2} + 60 + \frac{120}{2} = 135°$$

RESPOSTA: C

21 — Sabemos que é possível traçar, por um vértice de um polígono de n lados, n — 3 diagonais. Então, por um vértice de um icoságono (n = 20) podemos traçar 17 diagonais.

RESPOSTA: C

25 — O número de diagonais (d) excede de 25 o número de lados (n).

$$d - 25 = n$$

Mas $d = \frac{n(n-3)}{2}$. Então,

$$\frac{n(n-3)}{2} = 25 = n$$

$$n^2 - 3n - 50 = 2n$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0 \qquad n = 10$$

RESPOSTA: B

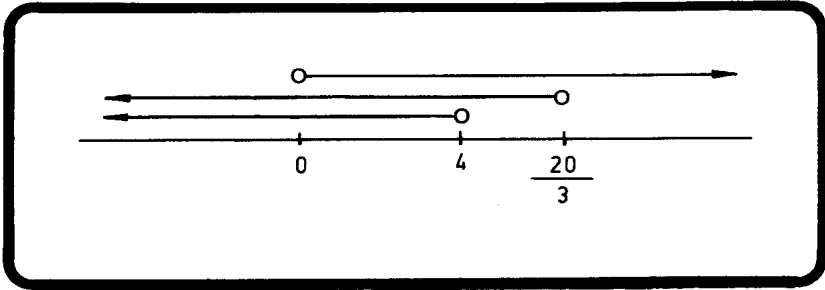
32 — Sejam
$a = 10$
$b = x + 2$
$c = 12 - 2x$.

Como cada lado de um triângulo deve ser menor que a soma dos outros dois, temos:

$$a < b + c \implies 10 < x + 2 + 12 - 2x \implies x < 4$$

$$b < a + c \implies x + 2 < 10 + 12 - 2x \implies x < \frac{20}{3}$$

$$c < a + b \implies 12 - 2x < 10 + x + 2 \implies x > 0$$

Para verificar quais são os valores de x que satisfazem às 3 condições, fazemos o gráfico abaixo:

Verificamos que $0 < x < 4$. Os valores inteiros possíveis são 1, 2 e 3.

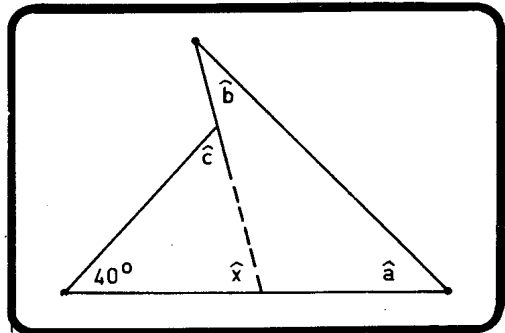
RESPOSTA: B

47 —

$\hat{x} = \hat{a} + \hat{b}$ (ângulo externo)

$40 + \hat{x} + \hat{c} = 180$

$\overbrace{\hat{a} + \hat{b}} + \hat{c} = 180 - 40$

$S = 140°$

RESPOSTA: C

53 —

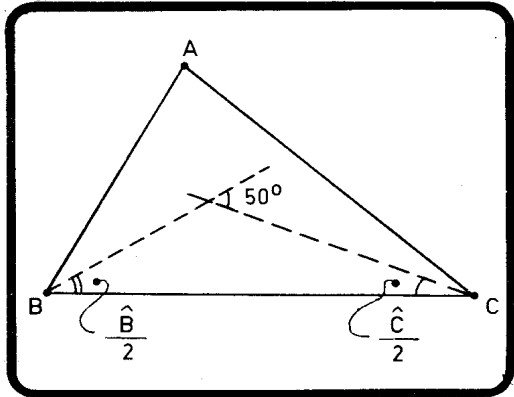
No triângulo BIC, 50° é o valor de um dos ângulos externos. Logo,

$$50 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}$$

$$100 = \hat{B} + \hat{C}.$$

Como $\hat{A} + \underbrace{\hat{B} + \hat{C}}_{100} = 180,$

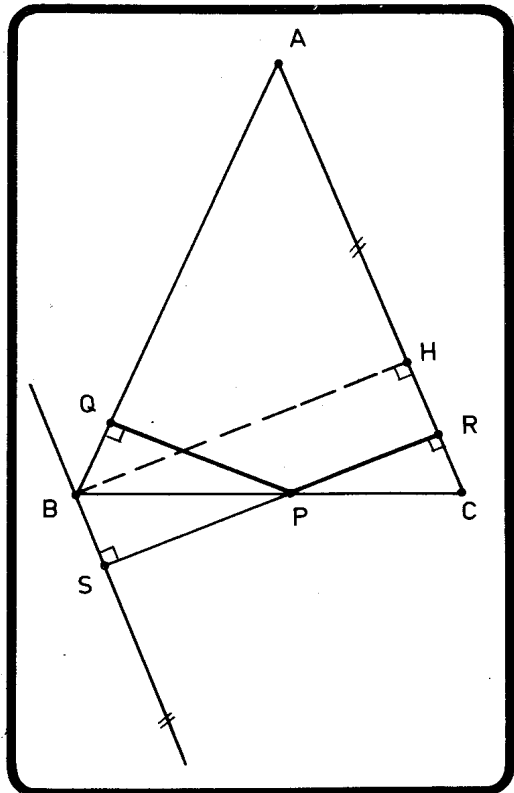
$$\hat{A} = 80°$$

RESPOSTA: A

58 —

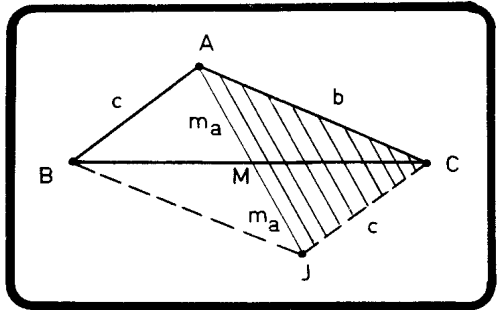
No triângulo ABC temos:

$AB = AC$ e $\hat{B} = \hat{C}$.

Sejam PQ e PR as distâncias de P aos lados congruentes do triângulo. Consideremos BX paralela a AC e a reta suporte de PR que encontra BX em S. Da congruência dos triângulos PQB e PSB, vem,

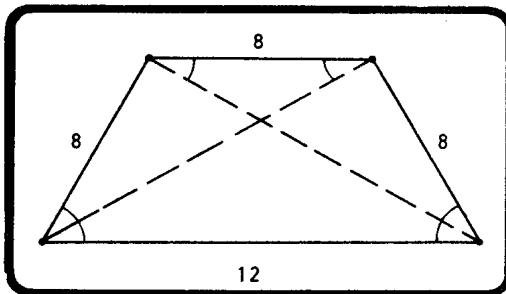
$$PQ = PS.$$

Então,

RESPOSTA: B

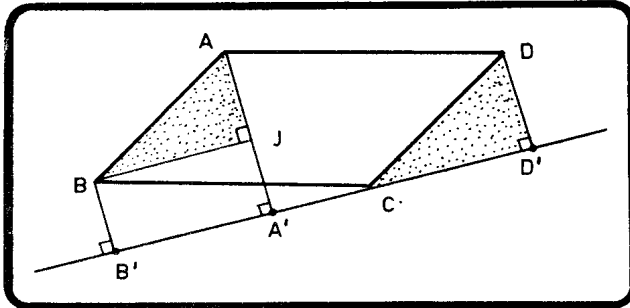
62 — Prolongando a mediana AM de um comprimento MJ = AM, vemos que o quadrilátero ACJB é um paralelogramo, pois suas diagonais cortam-se ao meio. Então, CJ = AB = C.

Analisando o triângulo AJC, podemos escrever:

$$2m_a < b + c = m_a < \frac{b + c}{2}$$

RESPOSTA: D

71 —

$(2p) = 36$ cm

Observando os triângulos isósceles, concluímos que os lados não paralelos são iguais à base menor.

RESPOSTA: D

$AA' = a$
$BB' = b$
$DD' = d$

Traçando BJ perpendicular a AA', temos:

$\Delta BJA = \Delta CDD' \implies AJ = DD' \implies$

$\implies a - b = d \implies$

$\implies a = b + d.$

RESPOSTA: A

79 — $b_m + m_e = 12$

$$\frac{b'}{b} = \frac{1}{2}$$

Da primeira equação temos:

$$\frac{b + b'}{2} = \frac{b - b'}{2} = 12$$

$$\frac{b + b' + b - b'}{2} = 12$$

$$\frac{2b}{2} = 12$$

$$b = 12$$

Na segunda encontramos:

$$\frac{b'}{12} = 1/2 \implies$$

$$\implies b' = 6$$

RESPOSTA: B

91 — $AB = 360/5 = 72°$

$CD = 360/15 = 24°$

$$\hat{\alpha} = \frac{72 - 24}{2}$$

$\hat{\alpha} = 24°$

RESPOSTA: B